

# Actions des groupes topologiques sur les objets universels

Brice Rodrigue MBOMBO  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences, Université de Yaoundé 1 (Cameroun)

27 janvier 2013

# Table des matières

<b>Dédicaces</b>	<b>2</b>
<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Résumé</b>	<b>6</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Systèmes dynamiques topologiques abstraits et généralités sur la moyennabilité</b>	<b>7</b>
1.1 Systèmes dynamiques topologiques abstraits . . . . .	7
1.1.1 Actions et Représentations . . . . .	7
1.1.2 Flots et compactifié équivariant . . . . .	9
1.1.3 Compactifié équivariant de Samuel . . . . .	11
1.2 Généralités sur la moyennabilité . . . . .	17
1.2.1 Moyenne invariante . . . . .	17
1.2.2 Moyennabilité et propriété du point fixe . . . . .	18
1.2.3 Exemples de Groupes Moyennables . . . . .	26
<b>Chapitre 2 Espaces test pour la moyennabilité et la moyennabilité extrême</b>	<b>31</b>
2.1 Espace test pour la moyennabilité des groupes polonais . . . . .	31
2.2 Espace test pour la moyennabilité des groupes polonais non archimédiens	36
2.2.1 Généralités sur les groupes polonais non archimédiens . . . . .	36
2.2.2 Décomposition du compactifié équivariant de Samuel en limite inverse . . . . .	40
2.3 Espace test pour la moyennabilité extrême . . . . .	44
2.3.1 Généralités sur la moyennabilité extrême . . . . .	44
2.3.2 Groupes de Lévy et moyennabilité extrême . . . . .	45
2.3.3 Espace test pour la moyennabilité extrême . . . . .	47

<b>Chapitre 3</b>	<b>Espaces test pour la moyennabilité topologique</b>	<b>51</b>
3.1	Généralités sur la moyennabilité topologique . . . . .	51
3.2	Moyennabilité topologique et Compactifié de Stone-Čech . . . . .	53
3.3	Espaces test pour la moyennabilité topologique . . . . .	57
<b>Chapitre 4</b>	<b>Groupe des isométries de l'espace d'Urysohn-Katětov</b>	<b>62</b>
4.1	Généralités sur les groupes universels . . . . .	62
4.2	Le Théorème d'Uspen'kij . . . . .	63
4.2.1	Espace Universel d'Urysohn . . . . .	63
4.2.2	Le groupe des isométries . . . . .	66
4.3	Construction de l'espace d'Urysohn-Katětov $\mathbb{U}_m$ . . . . .	69
4.4	Voisinages de l'identité des Sous-groupes de $Iso(\mathbb{U}_m)$ . . . . .	70
4.5	Groupes SIN et Groupes FSIN . . . . .	73
4.6	Sous-groupes FSIN du groupe $Iso(\mathbb{U}_m)$ . . . . .	77
4.7	Conclusion et perspectives . . . . .	82
<b>Annexe A</b>	<b>Notions sur les ordinaux et cardinaux</b>	<b>83</b>
<b>Annexe B</b>	<b>Quelques notions de topologie</b>	<b>86</b>
B.1	Poids et densité d'un espace topologique . . . . .	86
B.2	Topologie compact-ouvert . . . . .	87
B.3	Groupes polonais . . . . .	87
B.3.1	Le groupe symétrique infini $S_\infty$ . . . . .	87
B.3.2	Le groupe $Homeo(D^{\aleph_0})$ . . . . .	88
B.4	Compactifié de Stone-Čech . . . . .	89
B.5	Dimension de Lebesgue . . . . .	90
B.6	Produit diagonal . . . . .	90
B.7	Systèmes projectifs . . . . .	91
B.8	Structure uniforme . . . . .	91
<b>Annexe C</b>	<b>Quelques théorèmes classiques</b>	<b>94</b>
C.1	Théorème de Krein-Milman . . . . .	94
C.2	Théorème de Gelfand . . . . .	95
<b>References</b>		<b>96</b>

# Dédicaces

Je dédie ce travail à :

- A mes défunts grands-parents et à mon défunt papa MBOMBO Emmanuel.  
Que ceci soit un début d'accomplissement de vos rêves.
- A Ma mère DONGMO Anne pour son soutien constant.

# Remerciements

En tout premier lieu, j'adresse mes très sincères remerciements aux Professeurs **Vladimir Pestov** de l'université d'Ottawa (Canada) et **François Wamon** de l'université de Yaoundé 1 qui ont accepté de codiriger ma thèse. Leur générosité, leur rigueur et leur précieux conseils ont été d'une importance primordiale pour l'accomplissement de ce travail.

Je suis très reconnaissant aux Professeurs **Marcel Dossa** de l'université de Yaoundé 1 et **Valentin Ferenczi** de l'université de Sao Paulo (Brésil) d'avoir accepté d'écrire un rapport sur mon travail.

Je remercie également :

- Le **MAÉCI** (Ministère des Affaires Étrangères et du Commerce International) Canada qui par l'entremise du Bureau canadien de l'éducation internationale (**BCEI**) m'a accordé une subvention de recherche pour une visite de recherches à l'université d'Ottawa.
- Le Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (**NSERC**).
- Le **Département de Mathématiques et Statistiques de l'université d'Ottawa** en général et le groupe de recherche en analyse en particulier pour l'hospitalité au cours de mes visites.

Mes très sincères remerciements vont également à tous les enseignants du département de Mathématiques de l'Université de Yaoundé I qui ont contribué à ma formation.

Je remercie très sincèrement mes amis du Département de Mathématiques et Informatique de la Faculté des Sciences de l'Université de Douala dont les nombreux conseils et discussions auront contribué de façon significative à la réalisation du présent travail.

Toutes les personnes qui me sont proches ont contribué chacun en sa manière propre à la réalisation de ce travail. Je pense à toute la grande famille **NJI TAMANJE** pour sa patience et surtout pour toutes les privations consenties pendant les

nombreuses années de préparation de cette thèse. Je pense très particulièrement à mon très grand ami **Bruno S. Djieutcheu** et son épouse pour leurs nombreux conseils.

Enfin, je remercie **Dieu** le père tout puissant qui nous donne le souffle de vie et sans qui aucune chose n'est possible.

# Table des matières

# Résumé

Dans cette thèse, nous étudions l'existence des objets universels de deux types différents dans la théorie des groupes topologiques et leurs actions sur les espaces compacts.

Dans la première partie, nous contribuons au problème d'existence des espaces test pour la moyennabilité. Nous observons qu'un groupe polonais est moyennable si et seulement si toute action continue de celui-ci sur le cube de Hilbert possède une mesure de probabilité invariante. Ceci généralise un résultat de Bogatyĭ et Fedorchuk. Nous démontrons également que les actions continues sur l'espace de Cantor permettent de tester la moyennabilité, la moyennabilité extrême des groupes polonais non archimédiens, et la moyennabilité à l'infini des groupes discrets dénombrables. Il en résulte que cette dernière propriété peut également être testée par les actions sur le cube de Hilbert. Ces résultats généralisent un critère de Giordano et de la Harpe.

Dans la deuxième partie, nous contribuons au problème d'existence d'un groupe topologique universel de poids non dénombrable. Nous montrons que le groupe des isométries de l'espace d'Urysohn-Katětov de densité non dénombrable n'est pas universel pour la classe des groupes de poids non-dénombrable. Il ne contient pas le groupe des isométries de l'espace classique polonais universel d'Urysohn. Ce qui semble contradictoire avec le résultat d'Uspenkij (1990) sur l'universalité du groupe de isométries de l'espace classique polonais universel pour la classe des groupes polonais.

## Mots clés :

Moyennabilité, Moyennabilité extrême, Moyennabilité topologique, Espace test, Espace métrique d'Urysohn-Katětov, Groupe topologique universel.



# Abstract

In this thesis, we study the existence of universal objects of two different types in the theory of topological groups and their actions on compact spaces.

In the first part, we contribute to the problem of existence of test spaces for amenability. We observe that a Polish group is amenable if and only if every continuous action on the Hilbert cube admits an invariant probability measure. This generalizes a result of Bogatyĭ and Fedorchuk. We also show that actions on the Cantor space can be used to detect amenability and extreme amenability of Polish non-archimedean groups as well as amenability at infinity of discrete countable groups. As corollary, the latter property can also be tested by actions on the Hilbert cube. These results generalise a criterion due to Giordano and de la Harpe.

In the second part of this thesis we contribute to the problem of existence of an universal topological group of uncountable weight. We show that the group of isometries of a universal Urysohn-Katětov metric space of uncountable density is not a universal group of the corresponding weight. For instance, it does not contain the group of isometries of the classical separable Urysohn metric space. This stands in sharp contrast with Uspenskij's 1990 result about the group of isometries of the classical separable Urysohn metric space being a universal Polish group.

## Keywords

Amenability, Extreme amenability, Topological amenability, Test space, Urysohn-Katětov metric space, Universal topological group.

# Introduction Générale

Cette thèse traite principalement de deux sujets : les espaces test pour la *moyennabilité*, et le problème d'existence des *groupes topologiques universels*. On s'intéresse dans la première partie aux espaces test pour la moyennabilité, la moyennabilité extrême et la moyennabilité topologique.

Les groupes moyennables ont été introduits en 1929 par J. Von Neumann [76] dans son étude du paradoxe de Banach-Tarski [8] :

Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux boules, n'ayant pas nécessairement la même taille, il est possible de découper  $\mathcal{B}$  en un nombre fini de morceaux, et réarranger ces morceaux (par des isométries directes) de façon à ce qu'ils forment  $\mathcal{B}'$ . Une version fantaisiste serait de dire qu'il est possible de découper un petit pois en morceaux et réarranger ces morceaux pour obtenir une boule de la taille du soleil.

Par extension de cette idée, un groupe  $G$  admet une décomposition paradoxale s'il existe des sous-ensembles de  $G$  deux à deux disjoints  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$  et des éléments  $g_1, g_2, \dots, g_n, h_1, h_2, \dots, h_m$  de  $G$  tels que :

$$\bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j.$$

Le groupe libre à deux générateurs  $\mathbb{F}_2$  admet par exemple une décomposition paradoxale. Un groupe discret dénombrable  $G$  est dit moyennable s'il n'admet pas de décomposition paradoxale. On peut introduire la moyennabilité par plusieurs définitions équivalentes qui, en apparence, sont assez éloignées les unes des autres : existence de moyennes invariantes ; existence de mesures de probabilités invariantes ; propriété du point fixe ; propriétés de Reiter et de Reiter-Glicksberg ; propriétés de convolution dans  $L^p$  ; propriétés combinatoires du type Følner, etc...

Avant tout, la théorie consiste à prouver l'équivalence de ces diverses définitions. La classe des groupes moyennables contient les groupes finis, les groupes commutatifs, les groupes résolubles, le groupe unitaire  $\mathcal{U}(\ell^2)$  muni de la topologie forte (Gromov et Milman[43])...

Un groupe topologique  $G$  est dit *moyennable* si toute action continue de  $G$  sur un espace compact  $X$  possède une mesure de probabilité borélienne invariante.

Un espace topologique compact métrisable  $K$  est un espace test pour une classe  $\mathcal{C}$  de groupes topologiques si tout groupe  $G \in \mathcal{C}$  est moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur  $K$  possède une mesure de probabilité invariante. En réponse à une question de Grigorchuk, Giordano et de la Harpe [37] ont montré qu'un groupe discret dénombrable  $G$  est moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur l'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$  possède une mesure de probabilité invariante. On peut dire que l'ensemble de Cantor est un *espace test* pour la moyennabilité des groupes discrets dénombrables. Dans le même sens, Bogatyi et Ferdorchuk [14] ont répondu à une question de [37] et démontré que le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  est également un *espace test* pour la moyennabilité des groupes discrets dénombrables.

Dans cette thèse, nous démontrons que le cube de Hilbert reste un espace test pour la moyennabilité de tous les groupes polonais. Nous démontrons également que le résultat de Giordano et de la Harpe reste vrai pour les groupes polonais non archimédiens.

Un groupe topologique  $G$  est dit *extrêmement moyennable* si toute action continue de  $G$  sur un espace compact possède un point fixe. Un tel groupe non-trivial est moyennable, mais n'est jamais localement compact (Théorème de Veech [103]). Des exemples des groupes extrêmement moyennables sont nombreux et ils comprennent le groupe  $\text{Aut}(X, \mu)$  des automorphismes mesurables préservant la mesure  $\mu$  d'un espace borelien  $(X, \mu)$  muni de la topologie faible (Giordano et Pestov [38]) et le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$  des bijections de  $\mathbb{Q}$  dans lui-même qui préservent l'ordre muni de la topologie de la convergence simple (Pestov [84]).

Nous démontrons que l'ensemble de Cantor est un espace test pour la moyennabilité extrême des groupes polonais non archimédiens. La question d'existence d'un espace test pour la moyennabilité extrême des groupes polonais reste ouverte, car ni l'espace de Cantor ni le cube de Hilbert ne possèdent cette propriété.

Si un groupe discret dénombrable  $G$  opère par homéomorphismes sur un espace compact  $X$ , alors l'action de  $G$  sur  $X$  est *moyennable* s'il existe une suite  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications continues de  $X$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0$  pour

tout  $g \in G$ , où  $\mathbb{P}(G)$  désigne l'espace des mesures de probabilité sur  $G$ , muni de la topologie vague. Un groupe discret dénombrable  $G$  est dit *moyennable à l'infini* [49],[4], ou *topologiquement moyennable*, s'il existe un espace compact  $X$  et une action par homéomorphismes de  $G$  sur  $X$  qui est moyennable. Les exemples des groupes moyennables à l'infini comprennent les groupes moyennables, les groupes d'automorphismes d'arbres enracinés, les groupes hyperboliques (en particulier, les groupes libres). Voir [4] et [20], Ch. 5.

Par analogie avec le résultat de Giordano et de la Harpe, nous démontrons qu'un groupe discret dénombrable  $G$  est moyennable à l'infini si et seulement si  $G$  possède une action moyennable sur l'ensemble de Cantor ou sur le cube de Hilbert.

Autrement dit, l'ensemble de Cantor et le cube de Hilbert sont des espaces test pour la moyennabilité topologique des groupes discrets dénombrables.

Le chapitre 1 regroupe les notions de bases sur les systèmes dynamiques topologique abstraits et des généralités sur la moyennabilité des groupes indispensables pour la compréhension de la suite de la thèse.

Au chapitre 2, on utilise la décomposition du compactifié de Samuel équivariant  $S(G)$  d'un groupe polonais  $G$  en limite inverse d'un système de  $G$ -espaces compacts métrisables pour établir le résultat :

**Théorème 0.1.** *Un groupe polonais  $G$  est moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  possède une mesure de probabilité borélienne invariante.*

Si  $G$  est de plus non archimédien, nous observons que nous pouvons décomposer le compactifié de Samuel équivariant  $S(G)$  en limite inverse d'un système de  $G$ -espaces  $X_\alpha$  où les  $X_\alpha$  sont tous de Cantor. Cette observation est cruciale pour établir d'une part :

**Théorème 0.2.** *Un groupe polonais non archimédien  $G$  est moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur  $D^{\aleph_0}$  possède une mesure de probabilité borélienne invariante.*

et d'autre part :

**Théorème 0.3.** *Un groupe polonais non archimédien  $G$  est extrêmement moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur l'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$  possède un point fixe.*

Nous donnons une réponse partielle à la question d'existence d'un espace test pour la moyennabilité extrême des groupes polonais. Nous obtenons l'existence d'un espace test compact, séparable, mais non nécessairement métrisable pour la moyennabilité extrême des groupes polonais.

Grâce au théorème du point fixe de Schauder, nous observons que toute action continue d'un groupe monothétique ou d'un groupe solénoïde sur le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  admet un point fixe.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la moyennabilité à l'infini. Nous y démontrons l'équivalence entre plusieurs caractérisations bien connues de la moyennabilité à l'infini. La décomposition du compactifié de Samuel équivariant  $S(G)$  pour un groupe  $G$  polonais et non archimédien obtenue au chapitre 2, nous permet d'obtenir une preuve alternative du résultat suivant :

**Théorème 0.4.** *Un groupe discret dénombrable  $G$  est moyennable à l'infini si et seulement s'il admet une action moyennable sur l'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$ .*

C'est par ailleurs le principal résultat de [1]. Comme corollaire et en utilisant le théorème de Keller( Toute partie métrisable, convexe, compacte et de dimension infinie d'un espace de Fréchet est homéomorphe au cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  [13]), on obtient :

**Théorème 0.5.** *Un groupe discret dénombrable  $G$  est moyennable à l'infini si et seulement s'il admet une action moyennable sur le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$ .*

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude du problème d'existence d'un groupe topologique universel pour la classe des groupes de poids non-dénombrable.

Soit  $\mathcal{C}$  une classe d'espaces topologiques.  $X \in \mathcal{C}$  est dit universel pour cette classe si pour tout  $Y \in \mathcal{C}$ , il existe un homéomorphisme de  $Y$  sur un sous- espace de  $X$ .

L'espace de Cantor  $D^{\aleph_0}$  par exemple est universel pour la classe des espaces topologiques métrisables séparables et de dimension 0.

Un groupe topologique  $G$  est universel pour une classe  $\mathcal{C}$  de groupes topologiques si pour tout groupe topologique  $H \in \mathcal{C}$ , il existe un isomorphisme de groupes topologiques entre  $H$  et un sous-groupe de  $G$ . En réponse à une question de Ulam (cf. Problème 103 dans [65]), Uspenskij dans [101] a établi que le groupe  $Iso(\mathbb{U})$  des isométries de l'espace d'Urysohn  $\mathbb{U}$  sur lui-même muni de la topologie de la convergence simple est universel pour la classe des groupes métrisables et séparables. Quelques années avant, Uspenskij avait déjà établi dans [100] que le groupe  $Homeo(I^{\aleph_0})$  muni de la topologie compact-ouvert est universel pour la même classe de groupes topologiques.

Pendant longtemps il a été impossible de savoir si les deux groupes universels précédents sont isomorphes en tant que groupes topologiques. Les travaux de Pestov dans [85] permettront de répondre à cette question par la négative. En effet, Pestov établit dans [85] que le groupe  $Iso(\mathbb{U})$  est extrêmement moyennable. En même temps, le groupe  $Homeo(I^{\aleph_0})$  opère continûment sur l'espace compact  $I^{\aleph_0}$  sans points fixes.

La question d'existence d'un groupe topologique universel pour la classe des groupes topologiques de poids non dénombrables reste ouverte.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude des sous-groupes du groupe des isométries de l'espace d'Urysohn-Katětov de densité non-dénombrable  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$ .

Soit  $\mathfrak{m}$  un cardinal infini vérifiant

$$\sup \{\mathfrak{m}^n : n < \mathfrak{m}\} = \mathfrak{m}. \quad (1)$$

Par exemple,  $\aleph_0$ , et tout cardinal fortement inaccessible  $\mathfrak{m}$  vérifient la condition précédente.

Si  $\mathfrak{m}$  est un cardinal infini vérifiant la condition précédente, alors il existe à isométrie près un unique espace métrique complet  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  de poids  $\mathfrak{m}$  qui contient une copie isométrique de tout autre espace métrique de poids  $\leq \mathfrak{m}$  et est  $\mathfrak{m}$ -homogène, autrement dit, toute isométrie entre deux sous-espaces métriques de densité  $< \mathfrak{m}$  se prolonge en une isométrie globale de  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  sur lui-même. Par exemple,  $\mathbb{U}_{\aleph_0}$  est l'espace classique d'Urysohn.

Un candidat naturel pouvant être universel dans la classe des groupes topologiques de poids  $\mathfrak{m} > \aleph_0$  serait le groupe  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  des isométries de l'espace  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  (la version non-séparable de l'espace d'Urysohn construit par Katětov [56]) sur lui-même muni de la topologie de la convergence simple. Mais de façon surprenante, nous observons dans ce chapitre que ce n'est pas le cas.

Un groupe topologique possède la propriété (OB) ([92]) si toutes les orbites d'une action continue de  $G$  par isométries sur un espace métrique  $(X, d)$  sont bornées. Après avoir présenté la construction de Katětov de l'espace  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$ , nous caractérisons les voisinages de l'élément neutre dans un sous-groupe  $G$  de  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  de densité  $< \mathfrak{m}$ . Cette caractérisation nous permet d'établir :

**Théorème 0.6.** *Tout sous-groupe  $G$  de  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  possédant la propriété (OB) et ayant une densité  $< \mathfrak{m}$  est nécessairement FSIN : toute fonction bornée uniformément continue à gauche est uniformément continue à droite.*

En particulier, si  $G$  est métrisable ou localement connexe, alors  $G$  est SIN : les structures uniformes gauche et droite coïncident sur  $G$ . Ceci est une restriction sérieuse qui montre qu'en particulier, pour un cardinal non-dénombrable  $\mathfrak{m}$ , le groupe  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  ne contient pas une copie isométrique du groupe  $Iso(\mathbb{U})$ . D'autre part, nous faisons quelques observations dans le sens de caractériser les sous-groupes topologiques de  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$ . Dans cette direction, nous faisons l'observation suivante :

**Théorème 0.7.** *Tout groupe métrisable SIN de poids  $\leq \mathfrak{m}$  se plonge dans  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$ .*

La preuve de ce théorème utilise la même technique que Uspenkiĭ ([101],[102]) pour établir l'universalité du groupe  $Iso(\mathbb{U})$  pour la classe des groupes topologiques vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité. En même temps, nous ignorons si tous les groupes SIN de poids  $\leq \mathfrak{m}$  se plongent dans  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$ . Par contre, nous observons que tous les sous-groupes de  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  ne sont pas SIN. De façon précise, nous obtenons :

**Théorème 0.8.** *Si  $G$  est un groupe de poids  $\leq \mathfrak{m}$  tel que toute intersection d'une famille d'ouverts de  $G$  de cardinalité  $< \mathfrak{m}$  est un ouvert ( $P_{\mathfrak{m}}$ -groupe [84]), alors  $G$  est isomorphe à un sous-groupe du groupe  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$ .*

La caractérisation complète des sous-groupes de  $Iso(\mathbb{U}_m)$  reste une question ouverte. Les principaux résultats de cette thèse ont fait l'objet de publications : [2] pour la première partie et [67] pour la deuxième partie. Ce travail s'achève par un annexe où sont étudiées les notions de base utilisées dans notre travail.

# Chapitre 1

## Systèmes dynamiques topologiques abstraits et généralités sur la moyennabilité

Ce chapitre regroupe des éléments de bases de la théorie des systèmes dynamiques topologiques abstraits. Ces notions seront d'une grande importance pour la compréhension de la suite de la thèse. Pour plus de détails sur les systèmes dynamiques abstraits, le lecteur pourra consulter [7] ou [58]. Le présent chapitre regroupe également des généralités sur les groupes moyennables.

### 1.1 Systèmes dynamiques topologiques abstraits

#### 1.1.1 Actions et Représentations

Rappelons qu'un groupe  $G$  opère sur un ensemble  $E$  s'il existe une application

$$\begin{aligned}\tau : G \times E &\longrightarrow E \\ (s, x) &\longmapsto \tau(s, x) = s.x\end{aligned}$$

telle que  $s.(t.x) = (st).x$  et  $e.x = x$  pour tous  $s, t \in G$  et  $x \in E$ .

On dit encore que  $\tau$  est une action de  $G$  sur  $E$ .

Si  $E$  un espace topologique,  $G$  un groupe topologique et l'application  $\tau$  est continue ( $G \times E$  muni de la topologie produit), on dit que  $G$  opère continûment sur  $E$ .



**Définition 1.1.** *Un système dynamique topologique abstrait est un triplet  $(X, G, \tau)$  tel que :*

1.  *$X$  est un espace topologique,*
2.  *$G$  un groupe topologique,*
3.  *$\tau$  une action continue de  $G$  sur  $X$ .*

Si  $(X, G, \tau)$  est un système dynamique topologique abstrait, nous dirons que  $X$  est un flot du groupe  $G$ .

**Remarque 1.1.** 1. *Si l'espace  $X$  est compact, alors une action continue de  $G$  sur  $X$  peut être identifiée à un homomorphisme de groupe topologique  $G \longrightarrow \text{Homeo}_c(X)$  où  $\text{Homeo}_c(X)$  désigne le groupe des homéomorphismes de  $X$  sur lui-même muni de la topologie compact-ouvert. De façon précise, à tout  $g \in G$ , on associe l'application*

$$\begin{array}{ccc} \Theta : G & \longrightarrow & \text{Homeo}(X) \\ g & \longmapsto & \Theta(g) : X \longrightarrow X \\ & & x \longmapsto \Theta(g)(x) = gx \end{array}$$

*Cette application a bien sûr un sens même si  $X$  n'est pas compact. Cependant, on montre que l'homomorphisme  $G \longrightarrow \text{Homeo}_c(X)$  est continue seulement si  $X$  est compact. Réciproquement, tout homomorphisme continu d'un groupe topologique  $G$  vers le groupe des homéomorphismes  $\text{Homeo}_c(X)$  d'un espace compact  $X$  sur lui-même détermine de façon unique une action continue de  $G$  sur  $X$  ([83], Proposition 2.1.4).*

2. *L'espace topologique  $X$  peut avoir une structure supplémentaire :*

- (a) *Si  $X = (X, d)$  est un espace métrique, alors l'action du groupe  $G$  sur  $X$  est dite par isométries si pour tout  $g \in G$ , l'application*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & gx \end{array}$$

*est une isométrie de  $X$  sur lui-même. Dans ce cas, la continuité de l'action est équivalente à la continuité de l'homomorphisme de groupe  $G \longrightarrow \text{Iso}(X)$  où  $\text{Iso}(X)$  désigne le groupe de toutes les isométries de  $X$  sur lui-même muni de la topologie de la convergence simple (i.e celle induite par la topologie produit  $X^X$ ).*

- (b) *Si  $X = E$  est un espace de Banach, alors l'action  $\tau$  est une représentation de  $G$  dans  $E$  si pour tout  $g \in G$ , l'application*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & gx \end{array}$$

est un opérateur linéaire.

- (c) Si  $X = \mathcal{H}$  est un espace de Hilbert, alors la représentation  $\tau$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  est dite unitaire si pour tout  $g \in G$ , l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto gx\end{aligned}$$

est un opérateur unitaire :  $(\tau_g x, y) = (x, \tau_{g^{-1}} y)$  pour tout  $x, y \in \mathcal{H}$ . C'est un cas particulier d'une représentation par isométries.

### 1.1.2 Flots et compactifié équivariant

**Définition 1.2.** Soit  $X$  un flot compact d'un groupe  $G$  et soit  $x \in X$ . On appelle orbite de  $x$  l'ensemble  $G.x = \{g.x : g \in G\}$ . On notera  $\overline{G.x}$  son adhérence dans  $X$ .

**Remarque 1.2.** 1.  $\overline{G.x}$  est un sous-espace compact et  $G$ -invariant de  $X$ .

En effet, si on note  $\pi : G \times X \longrightarrow X$  l'action continue de  $G$  sur  $X$ , alors pour tout  $g \in G$ , l'application  $\pi_g : X \longrightarrow X$  est également continue et  $\pi_g(G.x) \subset G.x$  pour tout  $x \in X$  et pour tout  $g \in G$ . Ainsi, on a :

$$\pi_g(\overline{G.x}) \subset \overline{\pi_g(G.x)} \subset \overline{G.x}$$

2. En général, Si  $Y \subseteq X$  est une partie  $G$ -invariante compacte non vide de  $X$ , on peut définir une action de  $G$  sur  $Y$  en considérant la restriction de l'action de  $G$  sur  $X$ .

**Définition 1.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux flots du même groupe topologique  $G$ . Un morphisme de  $X$  dans  $Y$  (ou une application équivariante) est une application continue  $\pi : X \longrightarrow Y$  telle que  $\pi(g.x) = g.\pi(x)$  pour tout  $x \in X$  et pour tout  $g \in G$ .

**Définition 1.4.** Un flot  $X$  d'un groupe topologique  $G$  est dit minimal s'il ne contient pas de sous-flot propre de  $G$ .

**Lemme 1.1.** Un flot  $X$  de  $G$  est minimal si et seulement si pour tout  $x \in X$ , l'orbite de  $x$  est dense dans  $X$ .

**Preuve.** Soit  $X$  un flot minimal et soit  $x \in X$ .  $\overline{G.x}$  est fermé dans  $X$ , donc compact. Comme  $\overline{G.x}$  est de plus invariant, on a :  $\overline{G.x} = X$  car  $X$  est minimal. Supposons maintenant que  $X$  est non minimal et soit  $N$  un sous-ensemble fermé de  $X$  tel que  $\emptyset \neq N \subsetneq X$ . Si  $x \in N$ , alors  $\overline{G.x} \subset N$  alors  $\overline{G.x} \neq X$ . ■

**Théorème 1.1.** Tout flot  $X$  d'un groupe topologique  $G$  contient un sous-flot minimal  $Y \subseteq X$ .

**Preuve.** Posons  $\mathcal{M} = \{\emptyset \neq N \subseteq X \mid \text{tel que } N \text{ est fermé et invariant}\}$ .

Puisque  $X \in \mathcal{M}$ , alors  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ .

$\mathcal{M}$  est partiellement ordonné par l'inclusion.

Soit  $\{M_\alpha\}$  une chaîne de sous-ensemble de  $\mathcal{M}$ . Il est clair que la famille  $\{M_\alpha\}$  possède la propriété d'intersection finie. Comme  $X$  est compact,  $M^* = \bigcap M_\alpha \neq \emptyset$ . Ainsi,  $M^* \in \mathcal{M}$  et par le Lemme de Zorn  $\mathcal{M}$  contient un élément minimal qui est un sous-flot minimal de  $X$ . ■

Nous démontrerons plus loin le théorème :

**Théorème 1.2.** *Si  $G$  est un groupe topologique, alors il existe un flot minimal  $M(G)$  de  $G$  vérifiant la propriété suivante :*

*Pour tout flot minimal  $X$  de  $G$ , il existe un morphisme  $\pi : M(G) \longrightarrow X$ . De plus,  $M(G)$  est uniquement déterminé à isomorphisme près par cette propriété.*

**Définition 1.5.** *Le flot minimal  $M(G)$  du théorème précédent est appelé flot minimal universel de  $G$ .*

Introduisons à présent une autre notion importante de la théorie des systèmes dynamiques topologiques abstraits.

**Définition 1.6.** *Soit  $G$  un groupe topologique.*

1. *On appelle compactifié équivariant de  $G$ , tout couple  $(X, x_0)$  où  $X$  est un flot de  $G$  et  $x_0 \in X$  possède une orbite dense dans  $X$ .*
2. *Soient  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  deux compactifiés équivariants de  $G$ . Un morphisme de  $(X, x_0)$  dans  $(Y, y_0)$  est un morphisme de flots  $\pi : X \longrightarrow Y$  vérifiant  $\pi(x_0) = y_0$ .*

Le théorème suivant est un résultat important de la théorie des systèmes dynamiques topologiques abstraits.

**Théorème 1.3.** *Si  $G$  est un groupe topologique ; alors il existe un compactifié équivariant  $(Y, y_0)$  vérifiant la propriété suivante :*

*Pour tout compactifié équivariant  $(X, x_0)$ , il existe un morphisme de compactifié équivariant  $\pi : Y \longrightarrow X$ . De plus,  $(Y, y_0)$  est uniquement déterminé à isomorphisme près par cette propriété.*

**Définition 1.7.** *Le compactifié équivariant  $(Y, y_0)$  du théorème précédent est appelé compactifié équivariant de Samuel ou compactifié équivariant universel.*

Dans le prochain paragraphe, nous allons construire cet important objet afin de démontrer le théorème 1.3.

### 1.1.3 Compactifié équivariant de Samuel

Soit  $G$  un groupe topologique. Notons  $E = RUCB(G)$  l'ensemble des fonctions  $x : G \longrightarrow \mathbb{C}$  bornées et uniformément continues à droite (pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $e$  tel que  $gh^{-1} \in V \Rightarrow |x(g) - x(h)| < \varepsilon$  pour tout  $g, h \in G$ ). En munissant  $E$  de l'addition et de la multiplication point par point, prenant l'involution comme la conjugaison, et avec la norme  $\|x\|_\infty = \sup\{|x(g)| : g \in G\}$ ,  $E$  est une  $C^*$ -algèbre commutative et unifère.

Notons  $S(G)$  l'ensemble des caractères non nuls de la  $C^*$ -algèbre commutative et unifère  $E$  muni de la topologie faible-étoile que nous appellerons ici topologie de Gelfand.

D'après le Théorème de Gelfand (Theorème C.2),  $S(G)$  est compact et  $E$  s'identifie via la transformation de Gelfand à l'algèbre  $C(S(G))$  des fonctions continues sur  $S(G)$ .

De façon précise,  $S(G)$  est l'ensemble des morphismes d'algèbre non identiquement nuls et continues  $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$  muni de la topologie engendrée par la famille d'applications

$$\begin{aligned} \widehat{x} : S(G) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \widehat{x}(\varphi) = \varphi(x) \end{aligned}$$

Nous allons identifier  $x$  à  $\widehat{x}$  en cas de besoin.

**Lemme 1.2.** *Si  $G$  est un groupe topologique, alors  $G$  opère continûment sur  $S(G)$ .*

**Preuve.** Soit  $G$  un groupe topologique. Notons comme précédemment  $E = RUCB(G)$ . L'application

$$\begin{aligned} \eta : G \times E &\longrightarrow E \\ (g, x) &\longmapsto g.x = ({}^g x) : G \longrightarrow \mathbb{C} \\ h &\longmapsto {}^g x(h) = x(g^{-1}h) \end{aligned}$$

est bien définie.

En effet, si  $g \in G$  et  $x \in E$ , alors  $\|{}^g x\|_\infty = \|x\|_\infty$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $e$  dans  $G$  tel que  $bc^{-1} \in V \Rightarrow |x(b) - x(c)| \leq \varepsilon$ . Posons  $W = gVg^{-1}$ . Si  $bc^{-1} \in W$  alors  $(g^{-1}b)(g^{-1}c)^{-1} \in V$ . Ainsi,

$$|{}^g x(b) - ({}^g x)(c)| = |x(g^{-1}b) - x(g^{-1}c)| < \varepsilon.$$

Donc  ${}^g x$  est uniformément continue à droite. Il est facile de montrer que l'application  $\eta$  définit une action de  $G$  sur  $E$ .

Pour tout  $g \in G$ , l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g.x \end{array}$$

laisse invariante les fonctions constantes. Ainsi nous pouvons définir l'application

$$\begin{array}{ccc} \xi : G \times S(G) & \longrightarrow & S(G) \\ (g, \varphi) & \longmapsto & g.\varphi = ({}^g\varphi) : E \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & x \longmapsto {}^g\varphi(x) = \varphi(g^{-1}.x) \end{array}$$

On a  ${}^g\varphi \in S(G)$  pour tout  $g \in G$  et  $\varphi \in S(G)$ . Ainsi l'application  $\xi$  est bien définie et définit clairement une action de  $G$  sur  $S(G)$ .

Montrons que cette action est continue.

Soit  $g_0 \in G$ ,  $\varphi_0 \in S(G)$  et soit  $W$  un voisinage de  $g_0.\varphi_0$  dans  $S(G)$ . Puisqu'on peut identifier  $E$  à  $C(S(G))$  et  $S(G)$  est complètement régulier, il existe  $\hat{x} \in C(S(G))$  que nous allons identifier à  $x \in E$  par le théorème de Gelfand tel que  $(g_0.\varphi_0)(x) = 1$  et  $\varphi(x) = 0$  pour tout  $\varphi \in S(G) \setminus W$ . Posons

$$W_0 = \{\varphi \in S(G) : \varphi(g_0^{-1}.x) > \frac{1}{2}\}.$$

Observons que  $\varphi_0(g_0^{-1}.x) = 1$ , donc  $W_0$  est un ouvert de  $S(G)$  contenant  $\varphi_0$ . Maintenant, posons

$$V_0 = \{g \in G : \|g^{-1}.x - g_0^{-1}.x\|_\infty \leq \frac{1}{2}\}.$$

Il existe un voisinage  $V$  de  $e$  dans  $G$  tel que

$$bc^{-1} \in V \Rightarrow |x(b) - x(c)| \leq \frac{1}{2}.$$

Si  $g \in Vg_0$ , alors  $gb(g_0b)^{-1} = gg_0^{-1} \in V$ . Ainsi

$$|(g^{-1}.x)(b) - (g_0^{-1}.x)(b)| = |x(gb) - x(g_0b)| \leq \frac{1}{2}$$

pour tout  $b \in G$  et  $g \in Vg_0$ . Donc  $V_0 \supseteq Vg_0$  est un voisinage de  $g_0$ .

Si  $g \in V_0$  et  $\varphi \in W_0$ , alors

$$|\varphi(g^{-1}.x) - \varphi(g_0^{-1}.x)| \leq \|g^{-1}.x - g_0^{-1}.x\|_\infty \leq \frac{1}{2}. \text{ Car } \varphi \text{ est un caractère. Donc}$$

$$(g.\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}.x) \geq \varphi(g_0^{-1}.x) - \frac{1}{2} > 0. \text{ Ainsi } g.\varphi \in W. \blacksquare$$

**Lemme 1.3.** *Si  $G$  est un groupe topologique, alors  $G$  est homéomorphe à un sous espace dense de  $S(G)$ .*

**Preuve.** Si  $g \in G$ , alors on peut définir un élément  $\varphi_g \in S(G)$  par  $\varphi_g(x) = x(g)$  pour tout  $x \in E = RUCB(G)$ . Ceci nous permet de définir une application

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow S(G) \\ g &\longmapsto \varphi_g \end{aligned}$$

Puisque la topologie de  $G$  coïncide avec la topologie induite par la structure uniforme droite sur  $G$ , l'application  $\Psi$  est continue.

En effet, pour tout  $x \in RUCB(G)$  et pour tout  $g \in G$ , on a :

$$\widehat{x} \circ \Psi(g) = \widehat{x}(\varphi_g) = \varphi_g(x) = x(g).$$

Pour montrer que  $\{\varphi_g : g \in G\}$  est dense dans  $S(G)$ , nous allons utiliser un corollaire du théorème de Hahn-Banach (Voir le lemme C.2).

Supposons le contraire. D'après le lemme C.2, il existe  $h \in C(S(G))$  non nul tel que  $h(\varphi_g) = 0$  pour tout  $g \in G$ .

D'après le théorème de Gelfand, il existe  $x \in RUCB(G)$  tel que  $z(x) = h(z)$  pour tout  $z \in S(G)$ . Dans ce cas,  $x$  ne peut pas être la fonction nulle.

Mais  $x(g) = \varphi_g(x) = h(\varphi_g) = 0$  pour tout  $g \in G$ . Ce qui est absurde.

Soit  $g_0, h_0 \in G$  tel que  $g_0 \neq h_0$ . Il existe une pseudométrique continue bornée et invariante à droite  $d_r$  sur  $G$  telle que  $d_r(g_0, h_0) \neq 0$  (voir [48], 8.2). En posant  $x(g) = d_r(g, h_0)$ , nous avons :

$$\varphi_{g_0}(x) = x(g_0) = d_r(g_0, h_0) \neq 0 = d_r(h_0, h_0) = x(h_0) = \varphi_{h_0}(x).$$

Ainsi,  $\varphi_{g_0} \neq \varphi_{h_0}$ . Ce qui montre l'injectivité. ■

**Remarque 1.3.** 1. *On peut également voir  $S(G)$  comme le compactifié de Samuel de  $G$  par rapport à la structure uniforme droite sur  $G$  ([19]). Dans la terminologie anglo-saxonne, on l'appelle "greatest ambit". Nous l'appellerons ici tout simplement compactifié de Samuel équivariant.*

2. *Si  $G$  est un groupe dénombrable et discret, alors le compactifié de Samuel équivariant  $S(G)$  coïncide avec le compactifié de Stone-Čech  $\beta G$ . [30]*

Revenons maintenant à la preuve du théorème 1.3

**Preuve.** (du théorème 1.3) Prenons  $Y = S(G)$  et  $y_0 = e$ . Puisque l'orbite de  $e$  dans  $S(G)$  est  $G$  qui est dense,  $(S(G), e)$  est clairement un compactifié équivariant de  $G$ . Par le lemme 1.2,  $G$  opère sur  $E$  par l'action :  $g.x(h) = x(g^{-1}h)$ , puis canoniquement continûment sur  $S(G)$  par l'action  $g.\varphi(x) = \varphi(g^{-1}.x)$ .

Considérons maintenant un compactifié équivariant arbitraire  $(X, x_0)$  de  $G$ .  
Soit  $f \in C(X)$ . Définissons l'application

$$\begin{aligned} f^* : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto f^*(g) = f(gx_0) \end{aligned}$$

Montrons que  $f^* \in E$ .

Pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $U_x$  de  $x$  dans  $X$  tel que  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$  pour tout  $y \in U_x$  car  $f \in C(X)$ .

Puisque l'action de  $G$  sur  $X$  est continue, et  $ex = x$ , il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  dans  $X$  et un voisinage symétrique  $O_x$  de  $e$  dans  $G$  tel que  $O_x V_x \subset U_x$ . Puisque  $e \in O_x$ , on a :  $V_x \subset U_x$ .

Comme  $X$  est compact, il existe  $F \subset X$  fini tel que  $X \subset \bigcup_{x \in F} V_x$ .

Posons  $O = \bigcap_{x \in F} O_x$ . Il est clair que  $O$  est un voisinage symétrique de  $e$  dans  $G$ .

Si  $g \in O$  et  $y \in X$ , alors il existe  $x \in F$  tel que  $y \in V_x$ . Ainsi,  $g.y \in O V_x \subset O_x V_x \subset U_x$ .

On peut donc conclure que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $e$  dans  $G$  tel que  $g \in V \implies |f(g.x) - f(x)| < \varepsilon$  pour tout  $x \in X$ .

Si  $gh^{-1} \in V$ , alors

$$|f^*(g) - f^*(h)| = |f(g.x_0) - f(h.x_0)| = |f(gh^{-1}(h.x_0)) - f(h.x_0)| < \varepsilon.$$

Donc  $f^* \in E$ . Puisque  $f^*$  est clairement bornée.

En identifiant comme souvent  $E = RUCB(G)$  avec  $C(S(G))$ , nous avons donc un monomorphisme de  $C^*$ -algèbres

$$\begin{aligned} \pi : C(X) &\longrightarrow C(S(G)) \\ f &\longmapsto f^* \end{aligned}$$

Il est connu (voir par exemple [23], 2.4.3.6) que tout monomorphisme unitaire de  $C^*$ -algèbres  $\pi : C(K) \longrightarrow C(L)$  où  $K$  et  $L$  sont des espaces compacts non vides est de la forme  $\pi(f) = f \circ \Pi$  pour une surjection unique  $\Pi : L \longrightarrow K$ . De plus, si  $K$  et  $L$  sont des  $G$ -espaces, si nous faisons agir  $G$  sur  $C(K)$  et  $C(L)$  par l'action  $g.f(x) = f(g^{-1}.x)$  et si  $\pi$  est équivariante, alors  $\Pi$  est équivariante. En appliquant ceci à l'application

$$\begin{aligned} \pi : C(X) &\longrightarrow C(S(G)) \\ f &\longmapsto f^* \end{aligned}$$

précédente, il existe un unique homomorphisme de  $G$ -flot  $\Pi : S(G) \longrightarrow X$  avec  $f^* = f \circ \Pi$ . Il nous reste juste à montrer que  $\Pi(e) = x_0$ .

Pour tout  $f \in C(X)$ , on a :  $f^*(e) = f(x_0) = f(\Pi(e))$ . Ainsi, on a :  $\Pi(e) = x_0$ . ■

- Définition 1.8.** 1. Un semi-groupe est la donnée d'un ensemble non vide  $X$  muni d'une opération associative
2. Un semi-groupe  $X$  est dit semi-topologique à gauche s'il existe une topologie sur  $X$  tel que pour tout  $y \in X$ , l'application

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto xy \end{aligned}$$

est continue.

**Théorème 1.4.** Pour tout groupe topologique  $G$ , le compactifié équivariant de Samuel  $S(G)$  de  $G$  possède une structure de semi-groupe semi-topologique à gauche et la multiplication  $S(G) \times S(G) \longrightarrow S(G)$  prolonge l'action  $G \times S(G) \longrightarrow S(G)$ .

**Preuve.** Soit  $x, y \in S(G)$ , par la propriété universelle de  $S(G)$ , il existe un morphisme de compactifié équivariant  $r_y : S(G) \longrightarrow S(G)$  tel que  $r_y(e) = y$ . Définissons l'opération  $xy = r_y(x)$ .

Montrons que l'opération  $(x, y) \longmapsto xy$  définit une structure de semi-groupe semi-topologique sur  $S(G)$ . Soit  $y$  fixé, l'application  $x \longmapsto xy$  coïncide avec  $r_y$ . Donc est continue.

Soit  $y, z \in S(G)$ . Par la partie unicité du théorème 1.3, les applications  $r_z r_y$  et  $r_{yz}$  définies de  $S(G)$  dans  $S(G)$  coïncident. D'où l'associativité de l'opération. Puisque  $ex = r_x(e) = x$  et  $xe = r_e(x) = x$ ,  $e$  est l'unité de  $S(G)$ .

Pour terminer, Soit  $g \in G$  et  $x \in S(G)$ ,  $gx$  peut être compris de deux manières :

- Comme l'action de  $G$  sur  $S(G)$
- Comme le produit dans  $S(G)$

En effet,  $gx = r_x(g) = r_x(ge) = gr_x(e) = gx$ . Autrement dit, l'opération de semi-groupe sur  $S(G)$  prolonge l'action continue de  $G$  sur  $S(G)$ . ■

- Définition 1.9.** 1. Une partie  $I$  de  $S(G)$  est un idéal à gauche si  $S(G)I \subset I$ .
2. Un élément  $x$  d'un semi-groupe est dit idempotent si  $x^2 = x$

**Remarque 1.4.** 1. Tout sous-espace  $G$ -invariant fermé de  $S(G)$  est un idéal à gauche. En effet, soit  $X$  un sous-espace  $G$ -invariant fermé de  $S(G)$ . Pour  $a \in X$ , on a :  $r_a(G) = \{ga : g \in G\} \subseteq X$ . Puisque  $r_a$  est continue,  $r_a(S(G)) = r_a(\overline{G}) \subseteq r_a(G) \subseteq X$ . Donc  $X$  est un idéal à gauche

2. Dans la suite,  $M(G)$  sera un sous-flot minimal de  $S(G)$  un sous-espace compact et  $G$ -invariant de  $S(G)$ .

Démontrons le théorème 1.2, en établissant le corollaire suivant du théorème 1.3



**Corollaire 1.1.** *Pour tout  $G$ -espace minimal  $X$ , il existe un homomorphisme  $\pi$  de  $M(G)$  dans  $X$ .*

**Preuve.**

Soit  $X$  un flot minimal de  $G$ . Fixons  $x_0 \in X$ . Alors,  $(X, x_0)$  est un compactifié équivariant de  $G$ . D'après le théorème 1.3, il existe un morphisme de compactifiés équivariants  $\pi : (S(G), e) \longrightarrow (X, x_0)$ . Il est clair que la restriction de  $\pi$  à  $M(G)$  reste encore un homomorphisme. ■

Montrons pour terminer que  $M(G)$  est unique à isomorphisme près.

De façon précise, montrons la dernière partie du Théorème 1.3 i.e le théorème suivant :

**Théorème 1.5.** *Tout flot minimal compact de  $G$  vérifiant la propriété du corollaire 1.1 est isomorphe à  $M(G)$ .*

Avant de procéder à la preuve de cet important théorème, faisons les rappels suivants : Pour  $a \in S(G)$ , nous noterons  $r_a$  l'application  $x \longmapsto xa$  de  $S(G)$  dans lui-même

**Lemme 1.4.** *Si  $f : S(G) \longrightarrow S(G)$  est un  $G$ -morphisme et  $a = f(e)$ , alors  $f = r_a$ .*

**Preuve.** Pour tout  $x \in G$ , nous avons :  $f(x) = f(xe) = xf(e) = xa = r_a(x)$  ■

Nous aurons besoin du théorème suivant :

**Théorème 1.6.** *(Ellis [84]) Tout semi-groupe semi-topologique compact non vide  $K$  contient un élément idempotent.*

**Lemme 1.5.** *Tout  $G$ -morphisme  $f : M(G) \longrightarrow M(G)$  est un  $G$ -isomorphisme*

**Preuve.** Comme  $M(G)$  est un sous-semi-groupe fermé, d'après le théorème de Ellis (théorème 1.6),  $M(G)$  contient un élément idempotent  $p$ . Comme  $M(G)$  est minimal, on a :  $M(G)p = M(G)$ . Ainsi :  $r_p(x) = r_p(yp) = yp^2 = yp = x$  pour tout  $x \in M(G)$ .

Si  $f : M(G) \longrightarrow M(G)$  est un morphisme de  $G$ -espaces, alors  $f \circ r_p$  est un morphisme de  $S(G)$  dans  $M(G) \subseteq S(G)$ .

Puisque  $f \circ r_p(e) = f(r_p(e)) = f(p)$ , on a  $f \circ r_p = r_b$  pour  $b = f(p)$ .

Puisque la restriction de  $f \circ r_p$  à  $M(G)$  coïncide avec  $f$ , on a :  $f(x) = xb$  pour tout  $x \in M(G)$ .

Une fois encore  $M(G)b = M(G)$  donc  $p = cb$  avec  $c \in M(G)$ .

Ainsi, le morphisme  $g = r_c : M(G) \longrightarrow M(G)$  est l'inverse à droite de  $f$ .

En effet,  $fg(x) = xcb = xp = x$ .

Nous venons de montrer que dans le semi-groupe  $S$  des  $G$ -homomorphismes, chaque élément possède un inverse à droite. Donc  $S$  est un groupe. ■

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 1.5

**Preuve.** (du théorème 1.5)

Soit  $M'$  un autre flot compact universel de  $G$ , alors il existe des  $G$ -morphisms  $f : M(G) \rightarrow M'$  et  $g : M' \rightarrow M(G)$ . Puisque  $M'$  est minimal,  $f$  est surjective.

Par le lemme 1.5, l'application  $gf : M(G) \rightarrow M(G)$  est bijective. Ainsi  $f$  est injective ■

D'après ce qui précède, on peut associer à tout groupe topologique  $G$  un flot compact minimal  $M(G)$  unique à un isomorphisme près.

Il est possible de caractériser cet espace pour certains groupes particuliers comme le montre le résultat suivant :

**Théorème 1.7.** (*Pestov [84], Théorème 6.6*) Si  $\mathbb{S}^1$  désigne le cercle unité de  $\mathbb{C}$  et  $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$  le groupe de tous les homéomorphismes de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{S}^1$  muni de la topologie compact-ouvert, alors  $\mathbb{S}^1$  est le flot compact universel du groupe  $G = \text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ .

Il est naturel de se poser la question de savoir si tout groupe topologique admet une action continue sur un espace compact ? Cette question fondamentale a été répondu par Teleman [97] de la manière suivante :

**Théorème 1.8.** (*Teleman [97]*) Tout groupe topologique  $G$  opère effectivement :

1. sur un espace de Banach par isométries
2. sur un espace compact.

## 1.2 Généralités sur la moyennabilité

Dans cette section, on rappelle la définition de la moyennabilité et les propriétés de base sur la moyennabilité.

### 1.2.1 Moyenne invariante

Soit  $G$  un groupe topologique séparé. Si  $f$  est une fonction sur  $G$  à valeurs complexes, et si  $s \in G$ , posons

$$\begin{aligned} {}^s f : G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto {}^s f(x) = f(s^{-1}x) \end{aligned}$$

et notons comme précédemment,  $RUCB(G)$  l'espace de Banach de toutes les fonctions sur  $G$  à valeurs complexes bornées et uniformément continue à droite.

**Définition 1.10.** [31] Soit  $\mathcal{E}$  un sous-espace de Banach de  $RUCB(G)$  tel que :

1.  $1 \in \mathcal{E}$
2.  $f \in \mathcal{E}$  implique  $\overline{f} \in \mathcal{E}$

une moyenne sur  $\mathcal{E}$  est une forme linéaire  $m$  sur  $\mathcal{E}$  telle que :

1.  $m(1) = 1$
2. Pour toute  $f \in \mathcal{E}$ , on a :  $m(\overline{f}) = \overline{m(f)}$
3.  $m(f) \geq 0$  pour toute  $f \geq 0$

**Remarque 1.5.** Une moyenne  $m$  sur  $\mathcal{E}$  est automatiquement continue.

En effet,  $-\|f\|_\infty 1 \leq f \leq \|f\|_\infty 1$ . Ainsi,  $|m(f)| \leq \|f\|_\infty$ .

Si nous supposons de plus que  $\mathcal{E}$  est stable par translation, c'est-à-dire que  $f \in \mathcal{E}$  et  $s \in G$  impliquent  ${}^s f \in \mathcal{E}$ , alors une moyenne  $m$  sur  $\mathcal{E}$  est dite invariante si pour tous  $f \in \mathcal{E}$  et  $s \in G$ , on a :

$$m({}^s f) = m(f)$$

**Définition 1.11.** Un groupe topologique  $G$  est dit moyennable s'il existe une moyenne invariante sur  $RUCB(G)$ .

Si  $G$  est un groupe compact, alors  $RUCB(G) = C(G)$  et une moyenne invariante  $m$  sur  $C(G)$  est une mesure borélienne invariante et régulière sur  $G$  avec  $m(1_G) = 1$ . Ainsi, la mesure normalisée de Haar est l'unique moyenne invariante sur  $C(G)$ . En particulier, tout groupe compact est moyennable.

## 1.2.2 Moyennabilité et propriété du point fixe

### Mesures boréliennes

Soit  $X$  un espace topologique. La tribu borélienne de  $X$  que l'on notera  $\mathcal{B}(X)$  est la plus petite tribu contenant tous les ouverts de  $X$ . Une mesure définie sur  $\mathcal{B}(X)$  et prenant des valeurs finies sur les compacts est dite borélienne. Une mesure borélienne  $\mu$  est dite régulière si elle est intérieurement régulière et extérieurement régulière, c'est-à-dire si pour tout borélien  $B \in \mathcal{B}(X)$ , on a :

$$\mu(B) = \inf\{\mu(V) : B \subset V, V \text{ est ouvert}\}$$

et

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ est compact}\}$$

Supposons  $X$  compact. On note  $\mathbb{P}(X)$  l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes régulières sur  $X$ .

Soit  $x \in X$ . La masse de Dirac en  $x$  est la mesure borélienne  $\delta_x$  définie pour tout  $B \in \mathcal{B}(X)$  par

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que  $\delta_x \in \mathbb{P}(X)$ .

Soit  $C(X)$  l'espace vectoriel réel des fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on muni de la norme  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

Si  $\mu \in \mathbb{P}(X)$ , alors l'application  $L_\mu : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par  $L_\mu(f) = \int_X f d\mu$  pour tout  $f \in C(X)$  est une forme linéaire continue positive de norme  $\|L_\mu\| = 1$ .

Réciproquement, il résulte du théorème de représentation de Riesz (voir [93], théorème 2.14) que si  $L : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ , est une forme linéaire continue positive de norme 1, alors il existe une unique mesure de probabilité  $\mu \in \mathbb{P}(X)$  vérifiant  $L = L_\mu$ .

On peut donc identifier  $\mathbb{P}(X)$  à l'espace  $\{L \in C(X)^* : L \geq 0, L(1_X) = 1\}$ .

L'espace  $\mathbb{P}(X)$  s'identifie donc à un sous-ensemble convexe de la boule unité  $B = \{L \in C(X)^* : \|L\| \leq 1\}$  de  $C(X)^*$ . Où  $C(X)^*$  désigne le dual topologique de  $C(X)$ .

En effet, si  $\mu \in \mathbb{P}(X)$ , alors :

$$-\mu(|f|) = \mu(-|f|) \leq \mu(f) \leq \mu(|f|),$$

ainsi  $|\mu(f)| \leq \mu(|f|)$ . Avec  $|f|(x) = |f(x)|$  pour tout  $x \in X$ .

De plus, nous avons :

$$\mu(|f|) \leq \mu(\|f\|1_X) = \|f\|\mu(1_X) = \|f\|,$$

et  $|\mu(f)| \leq \|f\|$ . Donc  $\mu$  est continue et  $\|\mu\| \leq 1$ .

Rappelons que la topologie vague sur  $C(X)^*$  est la topologie la moins fine rendant continue toutes les applications  $\Psi_f : C(X)^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C(X)$  où  $\Psi_f(L) = L(f)$  pour tout  $L \in C(X)^*$ . Muni de cette topologie, l'espace  $C(X)^*$  devient un espace vectoriel topologique séparé localement convexe dans lequel  $B$  est compact. On munit  $\mathbb{P}(X) \subset C(X)^*$  de la topologie induite par la topologie vague de  $C(X)^*$ .

Alors  $\mathbb{P}(X)$  est compact puisque c'est un sous ensemble fermé du compact  $B$ .

Notons  $\mathbb{P}_0(X)$  l'enveloppe convexe des masses de Dirac. En application du théorème de Krein-Milman (théorème C.1),  $\mathbb{P}_0(X)$  est un sous-espace convexe dense de  $\mathbb{P}(X)$ .

Supposons que  $X$  soit muni d'une action continue d'un groupe topologique  $G$ . On dit qu'une mesure  $\mu \in \mathbb{P}(X)$  est  $G$ -invariante si  $\mu(gB) = \mu(B)$  pour tout borélien  $B$  et pour tout  $g \in G$ .

## Action sur $\mathbb{P}(X)$

**Définition 1.12.** Soit  $X$  un sous-ensemble convexe d'un espace localement convexe.

1. Une application  $\alpha : X \longrightarrow X$  est dite affine si :

$$\alpha(tx + (1-t)y) = t\alpha(x) + (1-t)\alpha(y)$$

pour tous  $x, y \in X$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

2. Soit  $G$  un groupe topologique. Une action continue  $\tau : G \times X \longrightarrow X$  est dite affine si pour tout  $g \in G$  l'application orbite

$$\begin{aligned} \tau_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \tau_g(x) = gx \end{aligned}$$

est affine.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $\alpha : X \longrightarrow Y$  une application continue. Pour toute mesure borélienne  $\mu$  sur  $X$ , on définit la mesure borélienne image sur  $Y$  par  $\mu^*(B) = \mu(\alpha^{-1}(B))$  pour tout ensemble borélien  $B$  de  $Y$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces compacts,  $\alpha : X \longrightarrow Y$  une application continue.  $\alpha$  induit une application linéaire continue

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : C(Y) &\longrightarrow C(X) \\ f &\longmapsto \tilde{\alpha}(f) : X \longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \tilde{\alpha}(f)(x) = f(\alpha(x)) \end{aligned}$$

Remarquons que  $\tilde{\alpha}(f) = f \circ \alpha$  pour  $f \in C(X)$ .

L'application  $\tilde{\alpha}$  permet de définir une application  $\alpha^* : C(X)^* \longrightarrow C(Y)^*$  définie par  $\alpha^*(\mu) = \mu \circ \tilde{\alpha}$  pour  $\mu \in C(X)^*$ . Plus précisément, nous avons :

$$\alpha^*(\mu)(f) = \mu(f \circ \alpha)$$

pour tout  $f \in C(Y)$  ou de manière équivalente,

$$\int_Y f d(\alpha^*\mu) = \int_X (f \circ \alpha) d\mu$$

pour tout  $f \in C(Y)$ . Ceci permet de conclure que pour tout sous-ensemble borélien  $A$  de  $Y$ , on a :  $\alpha^*(\mu)(A) = \mu(\alpha^{-1}(A))$ . Ainsi,  $\alpha^*(\mu)$  coïncide avec la mesure image  $\mu^*$  définie précédemment.

De plus, nous avons les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $\mu \in C(X)^*$ , on a :  $Supp(\alpha^*(\mu)) = \overline{\alpha[Supp(\mu)]}$ . ([25], Appendix C.9)
2. Si  $\alpha$  est une injection continue, alors  $\alpha^* : C(X)^* \longrightarrow C(Y)^*$  est injective. ([25], Appendix C.9)
3. Si  $Z$  est un espace topologique et  $\beta : Y \longrightarrow Z$  est une application continue, alors  $(\alpha \circ \beta)^* = \alpha^* \circ \beta^*$ . De plus,  $(id_X)^* = id_{C(X)^*}$ . ([25], Appendix C.9)
4. L'injection continue

$$\begin{array}{ccc} \delta^X : X & \longrightarrow & C(X)^* \\ x \longmapsto & \delta^X(x) = \delta_x : C(X) \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f \longmapsto & f(x) \end{array}$$

vérifie  $\delta^{(Y)} \circ \alpha = \alpha^* \circ \delta^{(X)}$ . Autrement dit, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \delta^{(X)} \downarrow & & \downarrow \delta^{(Y)} \\ C(X)^* & \xrightarrow{\alpha^*} & C(Y)^* \end{array}$$

est commutatif :

5. L'application  $\alpha^* : C(X)^* \longrightarrow C(Y)^*$  est affine et continue par-rapport à la topologie vague respectivement sur  $C(X)^*$  et  $C(Y)^*$ .  
En effet, soit  $\mu \in C(X)^*$ . Rappelons qu'une base voisinage de  $\mu$  est formée des ensembles de la forme

$$V_\mu = \{\nu \in C(X)^*, \quad | \int_X f_i d\nu - \int_X f_i d\mu | < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, k\}$$

où  $f_1, f_2, \dots, f_k \in C(X)$  et  $\varepsilon > 0$ .

Soit  $\mu_0 \in C(X)^*$ . Montrons que  $\alpha^*$  est continue en  $\mu_0$ . Soit

$$V_{\alpha^*(\mu_0)} = \{\nu \in C(Y)^*, \quad | \int_Y h_i d\nu - \int_Y h_i d\alpha^*(\mu_0) | < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, k\}$$

un voisinage de  $\alpha^*(\mu_0)$ . Cherchons

$U_{\mu_0} = \{\nu \in C(X)^*, \quad | \int_X f_i d\nu - \int_X f_i d\mu_0 | < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, l\}$  tel que :

$$\alpha^*(U_{\mu_0}) \subset V_{\alpha^*(\mu_0)}.$$

Soit  $\lambda \in U_{\mu_0}$ . Si  $\alpha^*(\lambda) \in V_{\alpha^*(\mu_0)}$ , alors

$$| \int_Y h_i d\alpha^*(\lambda) - \int_Y h_i d\alpha^*(\mu_0) | < \varepsilon,$$

pour tout  $i = 1, 2, \dots, k$ . Donc

$$|\int_X h_i \circ \alpha d\lambda - \int_X h_i \circ \alpha d\mu_0| < \varepsilon$$

pour tout  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Posons  $f_i = h_i \circ \alpha$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, k$  et choisissons  $\delta < \varepsilon$ . On a le résultat.

6. La restriction de  $\alpha^* : C(X)^* \longrightarrow C(Y)^*$  à  $\mathbb{P}(X)$  est continue, affine et envoie  $\mathbb{P}(X)$  sur  $\mathbb{P}(Y)$ .

On en déduit le lemme suivant :

**Lemme 1.6.** *Soit  $G$  un groupe topologique. Toute action continue de  $G$  sur un espace compact  $X$ , se prolonge en une action affine continue de  $G$  sur  $\mathbb{P}(X)$ .*

**Preuve.** Soit  $X$  un  $G$ -espace compact. Notons

$$\begin{aligned} \pi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

l'action continue de  $G$  sur  $X$ . Pour tout  $g \in G$ , l'application

$$\begin{aligned} \pi_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. On déduit de ce qui précède que pour tout  $g \in G$ , il existe un homéomorphisme  $\pi_g^* : \mathbb{P}(X) \longrightarrow \mathbb{P}(X)$ . D'après la propriété 3 précédente, l'application

$$\begin{aligned} \pi^* : G \times \mathbb{P}(X) &\longrightarrow \mathbb{P}(X) \\ (g, \mu) &\longmapsto \pi_g^*(\mu) \end{aligned}$$

est une action de  $G$  sur  $\mathbb{P}(X)$ . Comme toutes les applications  $\pi_g^* : \mathbb{P}(X) \longrightarrow \mathbb{P}(X)$  sont continues, l'action  $\pi^*$  de  $G_d$  dans  $\mathbb{P}(X)$  est continue,  $G_d$  étant le groupe  $G$  muni de la topologie discrète. Nous écrirons dans la suite tout simplement  $g\mu$  pour désigner  $\pi_g^*\mu$ . Par définition de  $\pi_g^*\mu$ , on a :

$$(g\mu)(f) = \mu(f \circ \pi_g) = \int_X f(gx) d\mu(x)$$

pour tout  $g \in G$  et  $f \in C(X)$  et

$$(g\mu)(B) = \mu(g^{-1}B)$$

pour tout  $g \in G$  et  $B$  un sous-ensemble borélien de  $X$ . L'action précédente de  $G$  sur  $\mathbb{P}(X)$  est continue même si  $G$  est muni de sa topologie initiale.

En effet, il nous suffit en vertu des propriétés de définition de la topologie vague sur  $\mathbb{P}(X)$  de montrer que pour tout  $f \in C(X)$ , l'application

$$\begin{aligned} \Psi : G \times \mathbb{P}(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (g, \mu) &\longmapsto \mu(f \circ \pi_g) \end{aligned}$$

est continue.

Soit  $(g, \mu) \in G \times \mathbb{P}(X)$ ,  $f \in C(X)$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Considérons le voisinage

$$V = \{\nu \in \mathbb{P}(Y), \quad |\int_Y f_i d\nu - \int_Y f_i d\alpha^*(\mu)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad i = 1, 2, \dots, k\}$$

où  $f_1, f_2, \dots, f_k \in C(X)$  de  $\mu$  dans  $\mathbb{P}(X)$ .

Pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $U_x$  de  $x$  dans  $X$  tel que  $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $y \in U_x$ . Puisque l'action de  $G$  sur  $X$  est continue, et  $e x = x$ , il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  dans  $X$  et un voisinage symétrique  $O_x$  de  $e$  dans  $G$  tel que  $O_x V_x \subset U_x$ . Puisque  $e \in O_x$ , on a :  $V_x \subset U_x$ .

Comme  $X$  est compact, il existe  $F \subset X$  fini tel que  $X \subset \bigcup_{x \in F} V_x$ .

Posons  $O = \bigcap_{x \in F} O_x$ . Il est clair que  $O$  est un voisinage symétrique de  $e$  dans  $G$ .

Si  $g \in O$  et  $y \in X$ , alors il existe  $x \in F$  tel que  $y \in V_x$ . Ainsi,

$$g \cdot y \in O V_x \subset O_x V_x \subset U_x.$$

Si  $(h, \nu) \in O \times V$ , on a :

$$\begin{aligned} |\nu(f \circ \pi_h) - \mu(f \circ \pi_g)| &\leq |\nu(f \circ \pi_h) - \nu(f \circ \pi_g)| + |\nu(f \circ \pi_g) - \mu(f \circ \pi_g)| \\ &\leq \|f \circ \pi_h - f \circ \pi_g\| + |\nu(f \circ \pi_g) - \mu(f \circ \pi_g)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi l'application  $\Psi$  est continue. ■

En général, on a le lemme suivant :

**Lemme 1.7.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux  $G$ -espaces compacts et soit  $\alpha : X \longrightarrow Y$  une application continue et équivariante, alors  $\mathbb{P}(X)$  et  $\mathbb{P}(Y)$  sont également des  $G$ -espaces et l'application  $\alpha^* : \mathbb{P}(X) \longrightarrow \mathbb{P}(Y)$  définie précédemment est équivariante.*



**Preuve.** Il nous reste seulement à vérifier que  $\alpha^* : \mathbb{P}(X) \longrightarrow \mathbb{P}(Y)$  est équivariante. Soient  $g \in G$ ,  $\mu \in \mathbb{P}(X)$   $f \in C(Y)$ , montrons que  $g(\alpha^*\mu) = \alpha^*(g\mu)$ . Notons  $\lambda$  l'action de  $G$  sur  $Y$ . Nous avons d'une part :

$$g\alpha^*\mu(f) = (\alpha^*\mu)(f \circ \lambda_g) = \mu(f \circ \lambda_g \circ \alpha)$$

et d'autre part

$$\alpha^*(g\mu)(f) = g\mu(f \circ \alpha) = \mu(f \circ \alpha \circ \pi_g).$$

Comme  $\alpha : X \longrightarrow Y$  est équivariante, on a :  $\alpha \circ \pi_g = \lambda_g \circ \alpha$ . D'où le résultat.

■ Le lemme suivant est bien connu et est d'une importance capitale pour la suite.

**Lemme 1.8.** ([61], Lemme 1.32) *Soit  $K$  un compact convexe non vide d'un espace vectoriel topologique séparé localement convexe  $E$ . Soit  $\mu \in \mathbb{P}(K)$ . Alors*

1. *Il existe un unique  $b = b(\mu) \in K$  vérifiant  $f(b) = \int_K f(k) d\mu(k)$  quel que soit  $f \in E^*$ . Le point  $b(\mu)$  est appelé  $\mu$ -barycentre de  $K$ .*
2. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} b : & \mathbb{P}(K) & \longrightarrow K \\ & \mu & \longmapsto b(\mu) \end{array}$$

*est continue.*

3. *On a  $A(b(\mu)) = b(A * \mu)$  pour toute application affine continue  $A : K \longrightarrow K$ , où  $A * \mu$  désigne la mesure image de  $\mu$  par  $A$ , c'est-à-dire  $A * \mu(B) = \mu(A^{-1}(B))$ .*

Pour plus de détails et résultats concernant la notion de barycentre voir [21].

**Lemme 1.9.** *Pour une action affine et continue d'un groupe topologique  $G$  sur un sous-ensemble compact et convexe  $X$  d'un espace localement convexe  $E$ , les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'action possède un point fixe.*
2. *L'action possède une mesure de probabilité invariante.*

**Preuve.**

- 1)  $\Rightarrow$  2) Soit  $x_0 \in X$  un point fixe pour l'action continue de  $G$  sur  $X$ . La mesure de Dirac  $\delta_{x_0}$  de support  $x_0$  est une mesure invariante.
- 2)  $\Rightarrow$  1) Supposons que  $G$  agit continûment et affinement sur un compact convexe  $X$  d'un espace vectoriel topologique séparé localement convexe  $E$ . D'après 2. l'espace  $X$  admet une mesure de probabilité  $\mu \in \mathbb{P}(X)$  qui est  $G$ -invariante. Notons  $b = b(\mu)$  le  $\mu$ -barycentre de  $X$  (voir lemme 1.8) et montrons que  $b$  est un

point fixe pour l'action continue de  $G$  sur  $X$ . Notons  $A_g : X \longrightarrow X$  l'application définie par  $A_g(x) = gx$  quel que soient  $x \in X$  et  $g \in G$ . Puisque  $\mu$  est  $G$ -invariante, on a :  $A_g * \mu = \mu$ . Il en résulte en utilisant le lemme 1.8

$$A_g(b(\mu)) = b(A_g * \mu) = b(\mu)$$

pour tout  $g \in G$ . Donc  $b(\mu)$  est un point fixe pour l'action de  $G$  sur  $X$ .

■

**Théorème 1.9.** *Soit  $G$  un groupe topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Toute action affine et continue de  $G$  sur un sous-espace compact et convexe  $K$  d'un espace localement convexe possède un point fixe.*
2. *Toute action continue de  $G$  sur un espace compact  $X$  possède une mesure de probabilité invariante.*
3. *Il existe une mesure de probabilité invariante sur le compactifié de Samuel équivariant  $S(G)$  de  $G$ .*
4.  *$G$  est moyennable*

**Preuve.**

- 1)  $\implies$  2) Soit  $X$  un  $G$ -espace compact. Notons  $\pi : G \times X \longrightarrow X$  l'action continue de  $G$  sur  $X$ . Par le lemme 1.6, l'action continue  $\pi$  se prolonge en une action affine et continue  $\pi^*$  de  $G$  sur  $\mathbb{P}(X)$ . D'après 1, cette dernière action possède un point fixe qui est une mesure de probabilité invariante pour l'action initiale de  $G$  sur  $X$ .
- 2)  $\implies$  1) est une conséquence du lemme 1.9.
- 2)  $\implies$  3) évident puisque  $S(G)$  est compact et  $G$  opère continûment sur  $S(G)$
- 3)  $\implies$  4) D'après le théorème de dualité de Gelfand (théorème C.2), il existe un isomorphisme isométrique de  $E = RUCB(G)$  sur l'algèbre  $C(S(G))$  des fonctions continues sur  $S(G)$ . Ainsi une mesure sur  $S(G)$  correspond à une moyenne sur  $E$ . Donc  $G$  est moyennable
- 4)  $\implies$  2) Supposons  $G$  moyennable. Nous noterons par  $m$  une moyenne invariante sur  $RUCB(G)$ . Soit  $X$  un  $G$ -espace compact. Soit  $x_0 \in X$  fixé et soit

$$\begin{aligned} t : G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto gx_0 \end{aligned}$$

l'application orbital correspondante. Pour tout  $f \in C(X)$ , considérons l'application  $f^* = f \circ t$ . On a  $f^* \in RUCB(G)$ .

En effet, l'action  $G \times X \longrightarrow X$  étant continue, il existe comme dans la preuve du théorème 1.3 un voisinage  $V$  de  $e$  dans  $G$  tel que  $g \in V \implies |f(g.x) - f(x)| < \varepsilon$  pour tout  $x \in X$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ .

Si  $gh^{-1} \in V$ , alors

$$|f^*(g) - f^*(h)| = |f(g.x_0) - f(h.x_0)| = |f(gh^{-1}(h.x_0)) - f(h.x_0)| < \varepsilon.$$

Donc  $f^* \in E$  puisque  $f^*$  est clairement bornée car  $X$  est compact. La mesure de probabilité  $\mu_m$  définie sur  $X$  par

$$\mu_m(f) = m(f^*)$$

est invariante.

■

### 1.2.3 Exemples de Groupes Moyennables

Le théorème suivant apparaît dans [35].

**Théorème 1.10.** *Soit  $G$  un groupe topologique.*

1. *Si  $G$  est moyennable et si  $H$  est un groupe topologique tel qu'il existe un homomorphisme surjectif continu de  $G$  sur  $H$ , alors  $H$  est moyennable.*
2. *Si  $A$  un sous-espace dense de  $G$  tel que tout sous-ensemble fini de  $A$  est contenu dans un sous-groupe moyennable de  $G$ , alors  $G$  est moyennable.*
3. *Si  $H$  est un sous-groupe normal de  $G$  et si  $H$  et  $G/H$  sont moyennables, alors  $G$  est moyennable.*
4. *Si  $G$  est abélien, alors  $G$  est moyennable.*

**Preuve.**

1. Soit  $\phi : G \longrightarrow H$  un homomorphisme surjectif continu. Soient  $X$  un espace compact et  $\bullet : H \times X \longrightarrow X$  une action continue de  $H$  sur  $X$ . Pour  $g \in G$  et  $x \in X$ , posons

$$g \bullet_1 x = \phi(g) \bullet x.$$

$\bullet_1$  est une action continue de  $G$  sur  $X$ . Par hypothèse, il existe une mesure de probabilité borélienne invariante  $\mu$  sur  $X$ . Puisque  $\phi(G) = H$ ,  $\mu$  est aussi  $H$ -invariante. Donc  $H$  est moyennable.

2. Soit  $X$  un  $G$ -espace compact. Pour  $g \in G$  et  $\mu \in \mathbb{P}(X)$ , notons  $g \bullet \mu$  l'action continue de  $G$  sur  $\mathbb{P}(X)$ . L'espace

$$Q_g = \{\mu : \mu \in \mathbb{P}(X), g \bullet \mu = \mu\}$$

est un fermé de  $\mathbb{P}(X)$  pour tout  $g \in G$  et

$$G_\mu = \{g : g \bullet \mu = \mu\}$$

est un fermé de  $G$  pour tout  $\mu \in \mathbb{P}(X)$ .

Pour tout sous-ensemble fini  $I$  de  $A$ , il existe un sous-groupe moyennable  $H_I$  de  $G$  contenant  $I$ . La restriction  $H_I \times X \rightarrow X$  de l'action continue de  $G$  sur  $X$  est continue. Ainsi, il existe une mesure borélienne  $H_I$ -invariante. De plus,  $\bigcap_{a \in I} Q_a \supseteq \bigcap_{a \in H_I} Q_a$ . Donc  $\bigcap_{a \in I} Q_a$  est non vide. Comme  $\mathbb{P}(X)$  est compact,  $\bigcap_{a \in A} Q_a$  est non vide. Soit  $\mu \in \bigcap_{a \in A} Q_a$ . Puisque  $G_\mu$  contient le sous-espace dense  $A$ , il coïncide avec  $G$ . Donc  $\mu$  est  $G$ -invariant.

3. Soit  $X$  un  $G$ -espace compact. Notons

$$\begin{aligned} \pi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

l'action continue de  $G$  sur  $X$ , et pour tout  $g \in G$ , notons

$$\begin{aligned} \pi_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

homéomorphisme de  $X$  sur lui-même.

Pour  $g \in G$  et  $\mu \in \mathbb{P}(X)$ , notons comme précédemment  $g \bullet \mu$  l'action continue de  $G$  sur  $\mathbb{P}(X)$ . Pour  $h \in H$ , posons

$$Q = \{\mu : h \bullet \mu = \mu\}.$$

$Q$  est un sous-espace fermé de  $\mathbb{P}(X)$ . Puisque  $H$  est moyennable,  $Q$  est non-vide. On a  $g \bullet \mu \in Q$  pour tous  $\mu \in Q$  et  $g \in G$ . En effet, si  $h \in H$ , on a :

$$h \bullet (g \bullet \mu) = (hg) \bullet \mu = (gg^{-1}hg) \bullet \mu = g \bullet (g^{-1}hg) \bullet \mu = g \bullet \mu,$$

puisque  $H$  est normal,  $g^{-1}hg \in H$ . Ceci nous permet de définir une action continue de  $G$  sur l'espace compact  $Q$ .

Si  $h \in H$  et  $g \in G$ , alors  $g \bullet \mu = (gh) \bullet \mu$  pour tout  $\mu \in Q$ . Ainsi, l'application

$$\begin{aligned} G/H \times Q &\longrightarrow Q \\ (gH, \mu) &\longmapsto (gH) \cdot \mu = g \bullet \mu \end{aligned}$$

définie une action continue de  $G/H$  sur  $Q$ . En effet,

Puisque  $G/H$  est moyennable, il existe une mesure de probabilité borélienne  $G/H$ -invariante  $\lambda$  sur  $Q$ .

Pour  $f \in C(X)$ , posons

$$p(f) = \int_Q \left( \int_X f(x) d\mu(x) \right) d\lambda(\mu)$$

$p$  est bien défini car l'application  $\mu \mapsto \int_X f(x) d\mu(x)$  est continue pour la topologie vague sur  $Q$ .  $p$  est une forme linéaire,  $p(f) \geq 0$  pour tout  $f \geq 0$  et  $p(1_X) = 1$ . Ainsi, il existe une mesure borélienne  $\nu$  sur  $X$  telle que  $p(f) = \int f d\nu$  pour tout  $f \in C(X)$ . Si  $g \in G$ , alors

$$\begin{aligned} \int f d(g \bullet \nu) &= \int f \circ \pi_g d\nu = p(f \circ \pi_g) \\ &= \int_Q \left( \int_X (f \circ \pi_x) d\mu(x) \right) d\lambda(\mu) \\ &= \int_Q \int_X f d\mu(g \bullet x) d\lambda(\mu) \\ &= \int_Q \int_X f d\mu((gH) \cdot x) d\lambda(\mu) \\ &= \int_Q \int_X f d\mu d\lambda(\mu), \text{ (}\lambda \text{ est } G/H\text{-invariante)} \\ &= \int f d\nu \end{aligned}$$

Pour tout  $f \in C(X)$ .

Ainsi  $g \bullet \nu = \nu$  pour tout  $g \in G$ . Donc  $G$  est moyennable.

4. Commençons par rappeler que le théorème du point fixe de Kakutani ([15]) affirme que si  $K$  est un compact convexe d'un espace localement convexe  $E$ , alors toute application affine continue  $T : K \rightarrow K$  admet un point fixe. Maintenant, soit  $G \times K \rightarrow K$  une action affine continue de  $G$  commutatif sur un compact convexe  $K$ . L'espace

$$K_g = \{x \in K : gx = x\}$$

est non vide (par le théorème du point fixe de Kakutani) et compact pour tout  $g \in G$ . Si  $g' \in G$ , alors pour tout  $x \in K_g$ , on a :

$$g(g'x) = (gg')x = (g'g)x = g'(gx) = g'x.$$

Ainsi  $K_g \cap K_{g'} \neq \emptyset$  pour tout  $g, g' \in G$ .

Par récurrence on obtient que les intersections finies des  $K_g$ ,  $g \in G$  sont non vides, et donc par compacité  $\bigcap_{g \in G} K_g \neq \emptyset$ . Si  $x \in \bigcap_{g \in G} K_g \neq \emptyset$ , alors  $x$  est un point fixe pour l'action affine précédente.

■

Terminons cette section par deux exemples de groupes non-moyennables. Le premier est un exemple classique d'un groupe discret non-moyennable construit par Von Neumann ([76])

1. Le groupe libre à deux générateurs non-abélien  $F_2$  muni de la topologie discrete n'est pas moyennable.

Commençons par rappeler que le groupe libre non-abélien à deux générateurs est l'ensemble des mots (simplifiés) de longueurs finies construit à partir de l'alphabet  $a, a^{-1}, b, b^{-1}$  et comprenant comme identité le mot vide  $\phi$ . L'opération de groupe ici est la concaténation i.e si  $w, z \in F_2$  sont deux mots avec  $w = w_1 w_2 \dots w_m$  et  $z = z_1 z_2 \dots z_n$ , alors  $w.z = w_1 w_2 \dots w_m z_1 z_2 \dots z_n$  qui est ensuite réduit de façon appropriée. Montrons que  $F_2$  muni de la topologie discrète est non-moyennable.

Supposons le contraire et soit  $\mu$  une mesure de probabilité invariante sur  $F_2$ . Pour  $x \in F_2$ , notons  $E_x = \{y \in F_2 : y \text{ est un mot réduit débutant par } x\}$ . Alors  $F_2 = \{\phi\} \cup E_a \cup E_{a^{-1}} \cup E_b \cup E_{b^{-1}}$ . On a aussi,  $aE_{a^{-1}} = E_{a^{-1}} \cup E_b \cup E_{b^{-1}} \cup \{\phi\}$ . Ainsi,  $F_2 = E_a \cup aE_{a^{-1}}$ . De la même manière, on a :  $F_2 = E_b \cup bE_{b^{-1}}$ . Posons  $A = E_a \cup E_{a^{-1}}$  et  $B = E_b \cup E_{b^{-1}}$ . En utilisant l'invariance de  $\mu$ , nous obtenons :  
 $\mu(A) = \mu(E_a) + \mu(E_{a^{-1}}) = \mu(E_a) + \mu(aE_{a^{-1}}) = 1$ . De la même manière,  $\mu(B) = 1$ . Maintenant,  $\mu(F_2) = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = 2$ . Absurde.  
Le deuxième exemple d'un groupe non-moyennable est plus récent.

2. Le groupe des automorphismes mesurables non-singuliers préservant la mesure  $\mu$  d'un espace de Borel standard  $(X, \mu)$ .

Introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de cet exemple. Soit  $(X, \Sigma, \mu)$  un espace de Borel standard muni d'une mesure de probabilité borélienne non-atomique  $\mu$ . Rappelons les notions suivantes :

1. On appelle  $\mu$ -atome, une partie  $A \in \Sigma$  tel que  $\mu(A) > 0$  et  $\forall B \in \Sigma, B \subset A \implies \mu(B) = 0$  ou  $\mu(A \setminus B) = 0$ .
2. une mesure  $\mu$  est dite diffuse ou non-atomique si elle n'admet aucun  $\mu$ -atome.
3. Un automorphisme  $T : X \longrightarrow X$  est dit singulier par rapport à  $\mu$  si

$$\mu(B) = 0 \implies \mu(T(B)) = \mu(T^{-1}(B)) = 0$$

Rappelons également qu'on peut définir sur  $(X, \Sigma, \mu)$  la relation d'équivalence :

$\mu_1 \sim \mu_2 \iff \mu_1$  et  $\mu_2$  ont les mêmes ensembles de mesures nulles.

De façon précise,  $\mu_1 \sim \mu_2 \iff (\mu_1(A) = 0 \iff \mu_2(A) = 0)$ .

Notons  $Aut^*(X, \mu)$  le groupe de tous les automorphismes non-singuliers

$\tau : X \longrightarrow X$  qui préserve la classe de la mesure  $\mu$  ( $\tau_*\mu \sim \mu$ ).

**Remarque 1.6.** Le groupe  $Aut(X, \mu)$  de tous les automorphismes mesurables non-singuliers préservant la mesure  $\mu$  ( $\tau_*\mu = \mu$ ) est un sous-groupe propre de  $Aut^*(X, \mu)$ .

En effet, prenons  $X = [0, 1]$ ,  $\tau(t) = t^2$  et  $A = [0, \frac{1}{3}]$ . Nous avons  $\tau(A) = [0, \frac{1}{9}]$ . Ainsi,  $\tau \in Aut^*(X, \mu)$  et  $\tau \notin Aut(X, \mu)$

L'application  $d(\tau, \sigma) = \mu\{x \in X : \tau(x) \neq \sigma(x)\}$  définie une distance sur  $\text{Aut}^*(X, \mu)$  invariante à gauche.

La topologie induite par cette distance est compatible avec la structure de groupe de  $\text{Aut}^*(X, \mu)$ . ([86] page 119)

La topologie induite par cette distance sur  $\text{Aut}^*(X, \mu)$  est appelée topologie uniforme.

**Théorème 1.11.** *(Giordano et Pestov [38, 39]) Le groupe  $\text{Aut}(X, \mu)$  muni de la topologie uniforme n'est pas moyennable.*

**Remarque 1.7.** *Contrairement à l'exemple classique de groupe non-moyennable établi par Von Neumann, l'exemple de Giordano et Pestov n'est pas un groupe localement compact.*

La question suivante reste une question ouverte.

**Question 1.1.** *Le groupe  $\text{Aut}^*(X, \mu)$  muni de la topologie uniforme est-il moyennable ? (Giordano et Pestov [38])*

**Remarque 1.8.** 1. *De nombreux auteurs utilisent la terminologie "moyennable" pour désigner un groupe moyennable pour la topologie discrète. Le danger de cette terminologie est que de nombreux résultats concernant les groupes moyennables discrets ne se généralisent pas aux groupes topologiques moyennables, même pas aux groupes localement compacts moyennables comme le montre les observations suivants :*

- (a) *Tout sous-groupe d'un groupe discret moyennable est moyennable. ([81], Proposition 0.16 page 14)*
- (b) *Tout sous-groupe fermé d'un groupe localement compact moyennable est moyennable. ([81], Proposition 1.12 page 31)*
- (c) *En dehors du cas des groupes localement compacts, les sous-groupes fermés d'un groupe localement compact moyennable ne sont en général pas moyennables. En effet, le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$  des bijections de  $\mathbb{Q}$  dans lui-même qui préservent l'ordre muni de la topologie de la convergence simple est moyennable(car il est extrêmement moyennable). De plus, le groupe libre(non-moyennable)  $F_2$  est isomorphe à un sous-groupe fermé de  $\text{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$  ([84]).*

- 2. *Les références [81] et [87] contiennent une revue complète sur les groupes moyennables localement compacts.*

## Chapitre 2

# Espaces test pour la moyennabilité et la moyennabilité extrême

### 2.1 Espace test pour la moyennabilité des groupes polonais

En réponse à une question de Grigorchuk, Giordano et de la Harpe ([37], 1997) ont montré qu'un groupe discret dénombrable  $G$  est moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur l'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$  possède une mesure de probabilité invariante. Ce résultat permet de détecter la moyennabilité d'une classe de groupes topologiques en utilisant un seul espace compact. D'où la notion d'espace test. On peut dire que l'ensemble de Cantor est un espace test pour la moyennabilité des groupes discrets dénombrables. Dans le même sens, Bogatyi et Ferdorchuk ([14], 2007) ont répondu à une question de [37] et ont démontré que le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  est également un espace test pour la moyennabilité des groupes discrets dénombrables.

Dans cette section, nous allons établir que le cube de Hilbert reste un espace test pour la moyennabilité des groupes polonais.

Commençons par rappeler le théorème de Keller suivant qui est d'une très grande importance dans nos démonstrations.

**Théorème 2.1.** (*Keller[13] Théorème 3.1*) *Toute partie compacte, convexe, et de dimension infinie (admet une partie libre infini) d'un espace localement convexe métrisable est homéomorphe au cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$ .*

**Lemme 2.1.** *Soient  $G$  un groupe topologique et  $A$  une algèbre de Banach. Notons*



$X_A$  le spectre de  $A$ . Si  $G$  opère continûment sur  $A$  par automorphismes, alors  $G$  opère continûment sur  $X_A$ .

**Preuve.** L'application

$$\begin{array}{ccc} \eta : G \times A^* & \longrightarrow & A^* \\ (g, \phi) & \longmapsto & g.\phi : A \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & x \longmapsto g.\phi(x) = \phi(g^{-1}.x) \end{array}$$

définie une action continue de  $G$  sur  $A^*$ .  $X_A$  étant stable par cette action, on peut considérer la restriction

$$\begin{array}{ccc} \eta_{X_A} : G \times X_A & \longrightarrow & X_A \\ (g, \phi) & \longmapsto & g.\phi : A \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & x \longmapsto g.\phi(x) = \phi(g^{-1}.x) \end{array}$$

de celle-ci à  $X_A$ .

Montrons qu'en munissant  $X_A$  de la topologie vague,  $\eta_{X_A}$  est continue.

Soit  $\phi \in X_A$ , alors pour tout  $x \in A$ , nous avons :  $|\phi(x)| \leq \|x\|$ .

Comme  $x \mapsto g^{-1}.x$  est continue, il existe un voisinage symétrique de  $g$  que nous noterons  $U$  tel que :

$$h \in U \implies \|g^{-1}.x - h^{-1}.x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in A$$

Prenons

$$V = \{f \in X_A, \ |(f - \phi)(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ i = 1, 2, \dots, k\}. \quad x_1, \dots, x_k \in A$$

Pour  $h \in U$  et pour  $\psi \in V$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |g.\psi(x_i) - h.\phi(x_i)| &= |\psi(g^{-1}.x_i) - \phi(h^{-1}.x_i)| \\ &= |\psi(g^{-1}.x_i) - \psi(h^{-1}.x_i) + \psi(h^{-1}.x_i) - \phi(h^{-1}.x_i)| \\ &\leq |\psi(g^{-1}.x_i - h^{-1}.x_i)| + |(\psi - \phi)(h^{-1}.x_i)| \end{aligned}$$

Comme  $\psi \in V \subset X_A$ , on a :

$$|\psi(g^{-1}.x_i - h^{-1}.x_i)| < \|g^{-1}.x_i - h^{-1}.x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus,

$$\psi \in V \implies |(\psi - \phi)(h^{-1}.x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc  $|g.\psi(x_i) - h.\phi(x_i)| < \varepsilon$ . ■

**Lemme 2.2.** Soient  $A$  et  $B$  deux  $C^*$ -algèbres commutatives et unifères et soit  $\lambda$  une application de  $A$  dans  $B$ . Notons  $X_A$  (respectivement  $X_B$ ) le spectre de l'algèbre  $A$  (respectivement  $B$ ). Considérons l'application  $\psi_\lambda : X_B \longrightarrow X_A$  définie par  $\psi_\lambda(\chi) = \chi \circ \lambda$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $\lambda$  est injective
2.  $\psi_\lambda$  est surjective.

**Remarque 2.1.** D'après le théorème de Gelfand, le lemme 2.2 est équivalent au lemme suivant :

**Lemme 2.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces compacts et soit  $f$  une application continue de  $X$  dans  $Y$ . Notons  $\widehat{f} : C(Y) \longrightarrow C(X)$  l'application définie par :  $\widehat{f}(g) = g \circ f$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est surjective
2.  $\widehat{f}$  est injective

**Preuve.**

- 1)  $\implies$  2) Soient  $g, h \in C(Y)$  tel que  $h \neq g$ . Alors il existe  $y \in Y$  tel que  $g(y) \neq h(y)$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $x \in X$  tel que  $f(x) = y$ . On a donc

$$\widehat{f}(g(x)) = g(y) \neq h(y) = \widehat{f}(h(x)).$$

- 2)  $\implies$  1) Supposons  $f$  non surjective et montrons que  $\widehat{f}$  n'est pas injective. Soit  $y \in Y \setminus f(X)$ . Comme  $f$  est continue,  $f(X)$  est compact donc fermé. Comme  $Y$  est compact,  $Y$  est complètement régulier. Ainsi, il existe  $h \in C(Y)$  tel que  $h|_{f(X)} = 0$  et  $h(y) = 1$ . Considérons l'application  $g \in C(Y)$  définie par  $g(y) = 0$  pour tout  $y \in Y$ . Nous avons  $\widehat{f}(g) = 0 = \widehat{f}(h)$  sur  $X$ . Mais  $g \neq h$ .

■

**Lemme 2.4.** S'il existe une mesure de probabilité invariante sur chaque  $G$ -espace dans un système inverse des  $G$ -espaces compacts, alors il existe une mesure de probabilité invariante sur la limite inverse correspondante.

**Preuve.** Soit  $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, I)$  un système inverse de  $G$ -espaces compacts. Notons  $X = \varprojlim X_\alpha$ . Par le lemme 1.7, ce système inverse permet d'obtenir un système inverse  $(\mathbb{P}(X_\alpha), \pi_{\alpha\beta}^*, I)$ . On a :  $\mathbb{P}(X) = \varprojlim \mathbb{P}(X_\alpha)$ . En effet, notons  $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$  la restriction de la projection  $pr_\alpha$  à  $X$ . Par le lemme 1.7, il existe

$$\begin{array}{ccc} \pi_\alpha^* : \mathbb{P}(X) & \longrightarrow & \mathbb{P}(X_\alpha) \\ \mu & \longmapsto & \mu \circ \pi_\alpha^{-1} \end{array}$$

L'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{P}(X) &\longrightarrow \varprojlim \mathbb{P}(X_\alpha) \\ \mu &\longmapsto (\pi_\alpha^* \mu)_{\alpha \in I} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. En effet,  $T$  est surjective, puisque chaque  $\pi_\alpha^*$  est surjective. Si  $T(\mu) = T(\nu)$ , alors  $\int_X (f \circ \pi_\alpha) d\mu = \int_X (f \circ \pi_\alpha) d\nu$  pour tout  $f \in C(X_\alpha)$ . Ainsi  $\mu = \nu$ .

Notons  $\mathbb{P}_{inv}(X_\alpha)$  l'espace des mesures de probabilités invariantes sur  $X_\alpha$  et considérons le sous-système  $(\mathbb{P}_{inv}(X_\alpha), \pi_{\alpha\beta}^*, I)$  de  $(\mathbb{P}(X_\alpha), \pi_{\alpha\beta}^*, I)$ . Notons  $\mathbb{P}_{inv}(X) = \varprojlim \mathbb{P}_{inv}(X_\alpha)$ . Puisque  $\mathbb{P}_{inv}(X_\alpha)$  est compact et non vide pour tout  $\alpha$ , on a  $\mathbb{P}_{inv}(X) \neq \emptyset$  (propriété d'intersection finie). Si  $\mu \in \mathbb{P}_{inv}(X)$ , alors  $\mu$  est une mesure de probabilité invariante sur  $X$ . ■

**Définition 2.1.** *Un groupe topologique  $G$  est dit polonais s'il est séparable et si sa topologie est définie par une métrique complète.*

La décomposition suivante du compactifié de Samuel par un système projectif est très utile dans nos démonstrations.

**Théorème 2.2.** *Si  $G$  est un groupe polonais, alors il existe un système projectif de  $G$ -espaces compacts et métrisables  $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, I)$  tel que  $S(G) = \varprojlim X_\alpha$*

**Preuve.** Fixons une partie dénombrable dense  $D \subseteq G$ . Soit  $(I, \preceq)$  l'ensemble ordonné suivant :  $I$  est l'ensemble de toutes les sous  $C^*$ -algèbres unifères séparables, fermées et  $G$ -invariantes de  $RUCB(G)$ .

Soit  $A, B \in I$ , définissons l'ordre par  $A \preceq B \iff A \subseteq B$ .

Pour  $A \in I$ , l'espace de Gelfand  $X_A$  de  $A$  est compact et métrisable, puisque  $A$  est séparable. Par le lemme 2.1,  $G$  opère continûment sur  $X_A$ . Nous pouvons identifier tout  $g \in G$  à un élément de  $X_A$  de telle façon que  $G$  soit un sous-espace dense de  $X_A$ . Ainsi  $(X_A, 1_G)$  est un compactifié équivariant métrisable de  $G$ .

Dans la suite, nous allons identifier par le théorème de Gelfand (théorème C.2)  $A$  à  $C(X_A)$  via l'application

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C(X_A) \\ x & \longmapsto & \hat{x}_A : X_A \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & f \longmapsto \hat{x}_A(f) = f(x) \end{array}$$

dite application de Gelfand.

Si  $A \subseteq B$ , alors l'injection canonique de  $i : A \longrightarrow B$  permet de définir par le lemme 2.2 une surjection  $\pi_{AB} : X_B \longrightarrow X_A$  continue telle que pour  $x \in A$ ,  $\hat{x}_B = \hat{x}_A \circ \pi_{AB}$ .

Ainsi, pour  $\varphi \in X_B$ , on a :  $\widehat{x}_A(\pi_{AB}(\varphi)) = \widehat{x}_B(\varphi)$  ou  $\pi_{AB}(\varphi)(x) = \varphi(x)$  i.e  $\pi_{AB}(\varphi) = \varphi|_A$ . De la même façon, il existe une surjection continue  $\pi_A : S(G) \longrightarrow X_A$  définie par  $\pi_A(\varphi) = \varphi|_A$  pour tout  $A \in I$ . D'où  $\pi_A = \pi_{AB} \circ \pi_B$  pour  $A \preceq B$ . Comme  $\pi_A(1_G) = \pi_{AB}(1_G) = 1_G$ , l'application

$$\begin{array}{ccc} \chi : (S(G), 1_G) & \longrightarrow & \varprojlim (X_A, 1_G) \\ \varphi & \longmapsto & (\pi_A(\varphi))_{A \in I} \end{array}$$

est un homomorphisme de compactifiés équivariants de  $G$ .

Soit  $(\varphi_A)_{A \in I} \in \varprojlim X_A$ , nous avons pour  $A \preceq B$ ,  $\varphi_A = \varphi_B|_A$ , donc il existe un unique  $\varphi \in S(G)$  tel que  $\pi_A(\varphi) = \varphi_A$ . Ainsi,  $\varphi \longmapsto (\pi_A(\varphi))_{A \in I}$  est un isomorphisme entre les compactifiés équivariants  $(S(G), 1_G)$  et  $\varprojlim (X_A, 1_G)$  de  $G$ . ■

**Proposition 2.1.** *Un groupe polonais  $G$  est moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur un espace compact et métrisable, possède une mesure de probabilité borélienne invariante.*

**Preuve.** La nécessité est évidente.

Montrons la suffisance. Par le théorème 2.2, il existe une système projectif de  $G$ -espaces compacts et métrisables  $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, I)$  tel que  $S(G) = \varprojlim X_\alpha$ . Par hypothèse, il existe sur chaque  $G$ -espace compact métrisable  $X_\alpha$  une mesure de probabilité invariante. Donc il existe une mesure de probabilité invariante sur  $S(G)$  par le lemme 2.4 et  $G$  est moyennable. ■

**Remarque 2.2.** 1. *Le résultat précédent est bien connu pour la classe des groupes dénombrables et discrets.*

2. *Évidemment, on peut supposer sans perte de généralité que tous les  $G$ -espaces  $X$  dans la proposition 2.1 sont infinis. C'est le cas si et seulement si  $G$  est infini.*

**Théorème 2.3.** *Un groupe polonais  $G$  est moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur le cube de Hilbert  $I^{\mathbb{N}_0}$  possède une mesure de probabilité borélienne invariante.*

**Preuve.** La nécessité est évidente. Montrons la suffisance.

Soit  $X$  un  $G$ -espace compact et métrisable. Par la remarque 2.2, on peut supposer que  $X$  est infini.  $\mathbb{P}(X)$  est donc un sous-espace compact métrisable de dimension infinie de  $\mathbb{R}^{C(X)}$ . Par le théorème de Keller (voir [13]),  $\mathbb{P}(X)$  est homéomorphe au cube de Hilbert  $I^{\mathbb{N}_0}$ . Ainsi l'action de  $G$  sur  $\mathbb{P}(X)$  possède une mesure de probabilité borélienne invariante. L'action de  $G$  sur  $\mathbb{P}(X)$  étant affine, elle possède par le lemme

1.9 un point fixe  $\mu \in \mathbb{P}(X)$ , qui est une mesure de probabilité borélienne invariante pour l'action initiale de  $G$  sur  $X$ . ■

**Remarque 2.3.** *L'idée d'utiliser le théorème de Keller dans le contexte dynamique est de Uspenskij, qui était le premier à l'employer dans [100].*

## 2.2 Espace test pour la moyennabilité des groupes polonais non archimédiens

Dans cette section, nous établissons que l'ensemble de Cantor reste un espace test pour la moyennabilité des groupes polonais non archimédiens. Nous généralisons ainsi le résultat de Giordano et de la Harpe ([37]) à la classe des groupes polonais non archimédiens.

### 2.2.1 Généralités sur les groupes polonais non archimédiens

**Définition 2.2.** *Un groupe topologique  $G$  est dit non archimédien s'il est séparé et s'il possède une base de voisinages de l'élément neutre formé de sous-groupes ouverts.*

L'ensemble des groupes polonais non archimédiens comprend :

1. les groupes localement compacts et totalement discontinus ([48]),
2. le groupe symétrique infini  $S_\infty$  i.e le groupe de toutes les bijections de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  muni de la topologie de la convergence simple,
3. le groupe  $\text{Homeo}(D^{\mathbb{N}_0})$  des homéomorphismes de l'ensemble de Cantor muni de la topologie de la convergence uniforme,
4. le groupe  $\text{Homeo}(X)$  des homéomorphismes de  $X$  sur lui-même.  $X$  étant un espace compact de dimension de Lebesgue 0 ([69]).

Les groupes polonais non archimédiens peuvent être caractérisés par la dimension de Lebesgue de leur compactifié de Samuel équivariant de la manière suivante.

**Théorème 2.4.** *(Pestov [84]) Soit  $G$  un groupe polonais.  $G$  est non archimédien si et seulement si les applications continues de  $S(G)$  dans  $D = \{0, 1\}$  séparent les points de  $S(G)$ .*

- Remarque 2.4.** 1. Les exemples 2. et 3. précédents sont traités avec plus de détails en annexe. Ces deux exemples permettent de conclure que la classe des groupes discrets dénombrables est strictement incluse dans celle des groupes polonais non archimédiens.
2. Les groupes polonais non archimédiens jouent un rôle important en logique où ils sont les groupes des automorphismes des structures de Fraïssé [9].
3. La classe des groupes polonais non archimédiens est stable par passage au sous-groupe, au produit et au quotient [74].

Rappelons qu'un groupe topologique  $G$  est universel pour une classe  $\mathcal{C}$  de groupes topologiques si pour tout groupe topologique  $H \in \mathcal{C}$ , il existe un isomorphisme de groupes topologiques de  $H$  sur un sous-groupe de  $G$ .

Les groupes polonais  $S_\infty$  et  $\text{Homeo}(D^{\aleph_0})$  sont en réalité universels pour la classe des groupes polonais non archimédiens.

**Théorème 2.5.** Soit  $G$  un groupe polonais. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $G$  est non archimédien.
2.  $G$  est isomorphe à un sous-groupe topologique de  $S_\infty$ .

**Preuve.**

- 1)  $\implies$  2) Soient  $G$  un groupe polonais non archimédien et  $(H_i)_{i \in I}$  une base dénombrable de voisinage de  $e$  formé de sous-groupes ouverts. Pour tout  $i \in I$ ,  $G$  opère continûment sur l'espace quotient  $G/H_i$ . Pour tout  $i \in I$ , l'espace quotient  $G/H_i$  est discret, car  $H_i$  est ouvert. Ainsi, l'espace  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G/H_i)$  est discret et dénombrable. De plus,  $G$  opère continûment sur  $X$ . Cette action continue entraîne un plongement  $G \hookrightarrow S_X = S_\infty$ .
- 2)  $\implies$  1) Puisque  $S_\infty$  est non archimédien, alors tout sous-groupe  $G'$  de  $S_\infty$  est non archimédien. Si  $G$  est isomorphe à  $G'$ , alors  $G$  est également non archimédien.

■

**Remarque 2.5.** 1. Le résultat précédent apparaît aussi dans [9].

2. Rappelons pour la suite que le théorème de Cantor ([30]) affirme que tout espace compact, métrisable, totalement discontinu et sans point isolé est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. L'ensemble de Cantor désignera donc pour nous un espace possédant les propriétés précédentes.
3. Le résultat suivant apparaît dans [69]. Mais nous proposons ici une preuve différente.

**Théorème 2.6.** *Soit  $G$  un groupe polonais. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1.  $G$  est non archimédien.
2.  $G$  est isomorphe à un sous-groupe topologique de  $\text{Homeo}(D^{\aleph_0})$ .

**Preuve.**

- 1)  $\implies$  2) Soit  $G$  un groupe polonais non archimédien. Il nous suffit de montrer que  $S_\infty$  est isomorphe à un sous-groupe de  $\text{Homeo}(D^{\aleph_0})$  pour conclure. Rappelons que  $S_\infty$  opère continûment sur  $\mathbb{N}$ .  
Notons  $\alpha\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  le compactifié d'Alexandroff de  $\mathbb{N}$ . Tout  $n \in \mathbb{N}$  est un point isolé de  $\alpha\mathbb{N}$ .  
Si  $\infty$  est un point isolé de  $\alpha\mathbb{N}$ , alors  $\{n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\infty\}$  est un recouvrement ouvert de  $\alpha\mathbb{N}$  sans sous-recouvrement fini. Ainsi  $\infty$  est le seul point non-isolé de  $\alpha\mathbb{N}$ . Comme  $|\alpha\mathbb{N}| \geq 2$ , l'espace produit  $(\alpha\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$  est sans-point isolé.  
Montrons que  $\alpha\mathbb{N}$  est totalement discontinue :  
Soit  $A \subseteq \alpha\mathbb{N}$  tel que  $|A| \geq 2$ . Alors il existe  $n \in A$  tel que  $n \in \mathbb{N}$ . Le singleton  $\{n\}$  est à la fois ouvert et fermé, i.e  $A$  n'est pas connexe. Donc  $\alpha\mathbb{N}$  est totalement discontinue. Ainsi l'espace produit  $(\alpha\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$  est totalement discontinu.  
 $\alpha\mathbb{N}$  est métrisable par le théorème de métrisabilité d'Urysohn (Tout espace normal  $T_1$  vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité est métrisable).  
Ainsi l'espace produit  $(\alpha\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$  est métrisable. Donc  $(\alpha\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$  est homéomorphe à l'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$ . L'action continue de  $S_\infty$  sur  $\mathbb{N}$  se prolonge en une action continue de  $S_\infty$  sur  $\alpha\mathbb{N}$ . Ainsi,  $S_\infty$  opère continûment sur  $(\alpha\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$  par l'action produit. Cette dernière action continue entraîne le plongement  $S_\infty \hookrightarrow \text{Homeo}((\alpha\mathbb{N})^{\mathbb{N}}) = \text{Homeo}(D^{\aleph_0})$  de  $S_\infty$  dans  $\text{Homeo}(D^{\aleph_0})$ .
- 2)  $\implies$  1)  $\text{Homeo}(D^{\aleph_0})$  étant non archimédien, alors tout sous-groupe  $G'$  de  $S_\infty$  est non archimédien. Si  $G$  est isomorphe à  $G'$ , alors  $G$  est également non archimédien.

■

Une question naturelle serait de savoir si les deux groupes précédents sont isomorphes en tant que groupes topologiques? Nous apporterons une réponse par la négative à cette question dans la suite du paragraphe :  
Rappelons le résultat suivant :

**Théorème 2.7.** ([10]) *Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille ordonnée de sous-groupes fermés d'un groupe topologique  $G$  tel que  $\bigcup_{i \in I} G_i$  soit dense dans  $G$ . Si  $G_i$  est moyennable pour tout  $i \in I$ , alors  $G$  est moyennable.*

**Corollaire 2.1.** *Le groupe  $S_\infty$  est moyennable*

**Preuve.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $S_n$  le groupe symétrique d'ordre  $n$ .  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'identifie à une famille de sous-groupes fermés de  $S_\infty$  croissante par l'inclusion. La croissance ici est comprise dans le sens suivant : Tout élément  $f : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  de  $S_n$  peut s'identifier à un élément

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ k &\longmapsto \tilde{f}(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } k \in \{1, 2, \dots, n\} \\ k & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

de  $S_\infty$ . Chaque groupe  $S_n$  étant fini, est moyennable.

Montrons pour terminer que  $S_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ .

Posons  $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  et soit  $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$  une bijection. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons :

$$M_n = n + f(1) + f(2) + \dots + f(n).$$

Considérons

$A = \{i \in \mathbb{N} : n < i \leq M_n\}$ ,  $B = \{1, 2, \dots, M_n\}$  et  $C = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ . Posons  $D = B \setminus C$ . Il est clair que  $|A| = |D|$ . Ainsi il existe une bijection  $g_n : A \longrightarrow D$ .

Considérons la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par :

$$f_n(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } k \leq n \\ g_n(k) & \text{si } n < k \leq M_n \\ k & \text{si } k > M_n \end{cases}$$

La suite  $(f_n)$  est une suite d'éléments de  $S$  et elle converge simplement vers  $f$ . Ainsi  $S_\infty$  est moyennable. ■

Le lemme suivant est crucial pour établir la non moyennabilité du groupe  $\text{Homeo}(D^{\mathbb{N}_0})$ .

**Lemme 2.5.** *Le groupe  $\text{Homeo}(D^{\mathbb{N}_0})$  opère d'une manière transitive à la fois sur les points de  $D^{\mathbb{N}_0}$  et sur les parties propres de  $D^{\mathbb{N}_0}$  à la fois ouvertes et fermées.*

**Théorème 2.8.** *Le groupe  $\text{Homeo}(D^{\mathbb{N}_0})$  n'est pas moyennable.*

**Preuve.** Supposons le contraire et soit  $\mu$  une mesure de probabilité invariante pour l'action continue de  $\text{Homeo}(D^{\mathbb{N}_0})$  sur  $D^{\mathbb{N}_0}$ . Puisque  $D^{\mathbb{N}_0}$  est totalement discontinue, il existe une partition  $\mathcal{C} = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $D^{\mathbb{N}_0}$  constituée d'ensembles à la fois ouverts et fermés. Soit  $C_{i_0} \in \mathcal{C}$  tel que  $0 < \mu(C_{i_0}) < \frac{1}{3}$ . D'après le lemme 2.5, il existe  $f \in \text{Homeo}(D^{\mathbb{N}_0})$  tel que  $f(C_{i_0}) = D^{\mathbb{N}_0} \setminus C_{i_0}$  et  $f(D^{\mathbb{N}_0} \setminus C_{i_0}) = C_{i_0}$ . Donc  $\mu(D^{\mathbb{N}_0} \setminus C_{i_0}) = \mu(C_{i_0})$  par l'invariance de  $\mu$ . Mais

$$\mu(D^{\mathbb{N}_0} \setminus C_{i_0}) = 1 - \mu(C_{i_0}) > \frac{2}{3} > \mu(C_{i_0})$$



Ce qui est absurde. D'où  $\mu$  n'est pas préservé par  $\text{Homeo}(D^{\aleph_0})$ . ■

**Corollaire 2.2.** *Les groupes topologiques  $\text{Homeo}(D^{\aleph_0})$  et  $S_\infty$  ne sont pas isomorphes.*

## 2.2.2 Décomposition du compactifié équivariant de Samuel en limite inverse

Commençons par rappeler le lemme suivant :

**Lemme 2.6.** *([16] chap. 10, prop. 8) Soient  $X$  un espace compact,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$  et  $C$  son graphe dans  $X \times X$ .  $C$  est fermée dans  $X \times X$  si et seulement si l'espace quotient  $X/\mathcal{R}$  est séparé.*

A présent, soient  $G$  un groupe topologique,  $Z$  un espace topologique, et  $f : G \rightarrow Z$  une application uniformément continue à droite de  $G$  telle que  $X = f(G)$  soit compact, alors  $f$  se prolonge en une application continue  $f : S(G) \rightarrow X$ , encore notée  $f$ .

Définissons sur  $S(G)$  la relation d'équivalence :

$$x\mathcal{R}y \text{ si } f(gx) = f(gy) \text{ pour tout } g \in G.$$

Notons  $C$  le graphe de  $\mathcal{R}$ .

Soit  $(x, y) \in (S(G) \times S(G) \setminus C)$ , il existe  $g \in G$  tel que  $f(gx) \neq f(gy)$ .  $X$  étant séparé, il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  de  $X$  tel que  $f(gx) \in U$  et  $f(gy) \in V$ . En posant  $W = g^{-1}(f^{-1}(U)) \times g^{-1}(f^{-1}(V))$ , on a  $W \subset (S(G) \times S(G) \setminus C)$ . Donc  $C$  est fermé dans  $S(G) \times S(G)$  et l'espace quotient  $X_f = S(G)/\mathcal{R}$  est séparé par le lemme 2.6. Puisque la surjection canonique  $\pi_f : S(G) \rightarrow X_f$  est continue, l'espace quotient  $X_f$  est compact. De plus, l'application

$$\begin{aligned} \bar{f} : X_f &\longrightarrow X \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est continue (par définition de la topologie quotient) et rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S(G) & \xrightarrow{f} & X \\ \pi_f \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X_f & & \end{array}$$

Soit  $F$  une famille d'applications uniformément continues à droite de  $G$  dans un espace compact  $Y$  (vues comme applications  $S(G) \longrightarrow Y$ ). Posons  $X = Y^F$  et soit  $f : S(G) \longrightarrow X$  le produit diagonal de la famille  $F$ . Notons  $X_F = X_f$  dans ce cas-là, et  $\pi_F : S(G) \rightarrow X_F$  la surjection canonique. Le lemme suivant est immédiat :

**Lemme 2.7.** *Si  $F$  sépare les points de  $S(G)$ , c'est à dire, pour tous  $x, y \in S(G)$  avec  $x \neq y$ , il existe  $h \in F$  tel que  $h(x) \neq h(y)$ , alors  $\pi_F$  est un homéomorphisme de  $S(G)$  sur  $X_F$ .*

**Preuve.**  $\pi_F$  est surjective et continue par définition. Rappelons que  $\pi_F$  est la surjection canonique associée à la relation d'équivalence :

$x \mathcal{R}_F y \iff$  pour tout  $g \in G$  et pour tout  $h \in F$ , on a  $h(gx) = h(gy)$ . Comme  $F$  sépare les points de  $S(G)$ , pour tout  $x, y \in S(G)$  avec  $x \neq y$ , il existe  $h \in F$  tel que  $h(x) \neq h(y)$  et alors  $\pi_F(x) \neq \pi_F(y)$ . Donc  $\pi_F$  est injective.  $\pi_F$  est donc un homéomorphisme. ■

Notons que pour toute famille d'applications  $F$ ,  $G$  opère continûment sur l'espace quotient  $X_F$  par l'action quotient :

$$g[x]_{\mathcal{R}_F} = [gx]_{\mathcal{R}_F}.$$

**Lemme 2.8.** *Si  $F \subseteq F'$ , alors il existe une surjection continue et  $G$ -équivariante canonique  $\pi_F^{F'}$  de  $X_{F'}$  sur  $X_F$ .*

**Preuve.** Soit  $x \in S(G)$ . Pour tout  $F \subseteq F'$ , définissons l'application

$$\begin{array}{ccc} \pi_F^{F'} : & X_{F'} & \longrightarrow X_F \\ & [x]_{\mathcal{R}_{F'}} & \longmapsto [x]_{\mathcal{R}_F} \end{array}$$

Montrons que  $\pi_F^{F'}$  est bien définie. Soit  $x, y \in S(G)$  tel que  $[x]_{\mathcal{R}_{F'}} = [y]_{\mathcal{R}_{F'}}$ , alors pour tout  $g \in G$  et pour tout  $h \in F'$ , on a  $h(gx) = h(gy)$  et en particulier, pour tout  $g \in G$  et pour tout  $h \in F$ , on a  $h(gx) = h(gy)$ . Donc  $[x]_{\mathcal{R}_F} = [y]_{\mathcal{R}_F}$ . De même, pour tout  $F \subseteq F'$ , on a :  $\pi_F^{F'} \circ \pi_{F'} = \pi_F$ . Donc  $\pi_F^{F'}$  est continue.  $\pi_F^{F'}$  est équivariante par rapport à l'action quotient sur  $X_{F'}$  et sur  $X_F$ . En effet, pour tout  $x \in S(G)$ , on a :

$$g\pi_F^{F'}([x]_{\mathcal{R}_{F'}}) = g[x]_{\mathcal{R}_F} = [gx]_{\mathcal{R}_F} = \pi_F^{F'}([gx]_{\mathcal{R}_{F'}}) = \pi_F^{F'}(g[x]_{\mathcal{R}_{F'}}).$$

■

**Lemme 2.9.** *Sous les hypothèses du lemme 2.8, et si  $G$  est dénombrable,  $X$  compact métrisable, et  $F = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est dénombrable, alors  $X_F$  est compact et métrisable.*

**Preuve.** Pour tout  $g \in G$ , notons  $g : S(G) \longrightarrow S(G)$  l'action de  $G$  sur  $S(G)$ . Pour tout  $f_i \in F$ , on a  $f_i : S(G) \longrightarrow X$ . Considérons le produit diagonal  $\Delta_i f_i : S(G) \longrightarrow X^{|F|}$  et posons  $f' = \Delta_i f_i \circ g : S(G) \longrightarrow X^{|F|}$ . Comme  $X$  est compact et métrisable,  $X^{|F|}$  est aussi compact et métrisable car  $F$  est dénombrable. Notons encore  $f'$  l'application  $f' : S(G) \longrightarrow f'(S(G))$ . Par le même raisonnement que précédemment, il existe une application  $\bar{f}' : X_F \longrightarrow X = f'(S(G))$  continue telle que  $\bar{f}' = \bar{f} \circ \pi_F$ . Comme  $F$  sépare les points de  $S(G)$ ,  $\bar{f}'$  est injective.  $X_F$  étant compact,  $\bar{f}'$  est un homéomorphisme de  $X_F$  sur  $f'(S(G))$ . Ainsi  $X_F$  est compact et métrisable. ■

**Lemme 2.10.** *Soit  $\Phi$  une collection de familles de fonctions de  $S(G)$  dans  $X$ . Supposons que  $\Phi$  est dirigée par l'inclusion, c'est à dire, quels que soient  $F, F' \in \Phi$ , il existe  $F'' \in \Phi$  tel que  $F \subseteq F'', F' \subseteq F''$ . Alors le système  $(X_F, \pi_F^{F'}, \Phi)$  forme un système projectif de  $G$ -espaces.*

**Preuve.** Pour tout  $F \in \Phi$ ,  $G$  opère continûment sur  $X_F$  par l'action quotient. Pour tout  $F \subseteq F'$ , les applications  $\pi_F^{F'}$  sont équivariantes par le lemme 2.8. Soit  $F, F', F'' \in \Phi$  tel que  $F \subseteq F' \subseteq F''$  et soit  $x \in S(G)$ , on a :

$$(\pi_F^{F'} \circ \pi_{F'}^{F''})([x]_{\mathcal{R}_{F''}}) = \pi_F^{F'}([x]_{\mathcal{R}_{F'}}) = [x]_{\mathcal{R}_F} = \pi_F^{F''}([x]_{\mathcal{R}_{F''}}).$$

Donc

$$\pi_F^{F'} \circ \pi_{F'}^{F''} = \pi_F^{F''}.$$

■

**Remarque 2.6.** *Supposons que la réunion  $\cup\{F : F \in \Phi\}$  sépare les points de  $S(G)$ . Alors la limite projective du système  $(X_F, \pi_F^{F'})$  est isomorphe, en tant que  $G$ -espace compact à  $S(G)$ . En effet, considérons l'application*

$$\begin{aligned} \Psi : S(G) &\longrightarrow \varprojlim X_F \\ x &\longmapsto (\pi_F(x))_{F \in \Phi} \end{aligned}$$

*Soit  $x, y \in S(G)$  tel que  $x \neq y$ . puisque  $\cup\{F : F \in \Phi\}$  sépare les points de  $S(G)$ , il existe  $F \in \Phi$  tel que  $\pi_F(x) \neq \pi_F(y)$ . Donc  $\Psi(x) \neq \Psi(y)$  et  $\Psi$  est injective.  $\Psi$  est surjective par définition. Soit  $x \in S(G)$ , on a :*

$$g\Psi(x) = g(\pi_F(x))_F = (g\pi_F(x))_F = (\pi_F(gx))_F = \Psi(gx).$$

*Donc  $\Psi$  est équivariante.*

**Lemme 2.11.** *Si  $X$  est un compact de dimension zéro (au sens de Lebesgue), alors  $X_F$  est de dimension zéro.*

**Preuve.** Soit  $[x], [y] \in X_F$  tel que  $[x] \neq [y]$ , alors  $x \neq y$ . Puisque  $F$  sépare les points de  $S(G)$ , il existe  $f_i \in F$  tel que  $f_i(x) \neq f_i(y)$ . Comme  $X$  est totalement discontinu, il existe une décomposition  $U \cup V$  de  $X$  telle que  $f_i(x) \in U$  et  $f_i(y) \in V$ . Posons  $\dot{U} = \overline{f_i}^{-1}(U)$  et  $\dot{V} = \overline{f_i}^{-1}(V)$ . Clairement,  $\dot{U} \cup \dot{V}$  est une décomposition de  $X_F$  et  $[x] \in \dot{U}$ ,  $[y] \in \dot{V}$ . Ainsi  $X_F$  est totalement discontinu, donc de dimension 0. ■

**Remarque 2.7.** Si  $X_F$  contient un point isolé  $x_0$ , alors le sous-groupe ouvert  $H = St_{x_0} = \{g \in G : gx_0 = x_0\}$  est tel que pour tout  $h \in F$ , on a  $h|_{gH}$  est constante.

Pour garantir la non-existence des points isolés, nous allons supposer que la famille  $F$  vérifie la condition  $(\star)$  suivante :

Pour tout voisinage  $V$  de  $e$ , il existe  $h \in F$  et  $x \in V$  tel que  $h(x) \neq h(e)$ .

Dans ces conditions, on a le lemme :

**Lemme 2.12.**  $G$  étant un groupe topologique,  $X$  un espace compact, et  $X_F$  définie comme précédemment avec  $F$  vérifiant la condition  $(\star)$ , alors ou bien  $X_F$  est fini, ou bien  $X_F$  ne contient aucun point isolé.

**Preuve.** Supposons  $X_F$  infini et soit  $x_0$  un point isolé de  $X_F$ . Le sous-groupe ouvert  $H = St_{x_0} = \{g \in G : gx_0 = x_0\}$  est donc un voisinage de  $e$  tel que pour tout  $h \in F$ ,  $h|_{gH}$  est constante. Ce qui est absurde puisque  $F$  vérifie la condition  $(\star)$ . En effet, vérifié la propriété  $(\star)$  revient à dire qu'il existe  $h \in F$  non-constante sur  $H$  en particulier. ■

**Corollaire 2.3.** Si  $G$  est infini dénombrable,  $X$  compact de dimension zéro et  $F$  dénombrable et vérifie  $(\star)$ , alors  $X_F$  est homéomorphe à l'espace de Cantor.

On déduit de tout ce qui précède le théorème fondamental suivant :

**Théorème 2.9.** Si  $G$  est non archimédien et polonais, alors  $S(G)$  se développe en limite projective d'un système de  $G$ -espaces compacts métrisables de dimension zéro. Si de plus,  $G$  est infini, alors il existe un développement constitué de  $G$ -espaces homéomorphes à l'espace de Cantor.

**Théorème 2.10.** L'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$  est un espace test pour la moyennabilité des groupes polonais non archimédien. Autrement dit, un groupe polonais non archimédien  $G$  est moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur  $D^{\aleph_0}$  possède une mesure de probabilité invariante.

**Preuve.** La nécessité est évidente. Montrons la suffisance.  $G$  étant un groupe polonais non archimédien, il existe par le théorème 2.9, un système projectif de

$G$ -espaces  $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, I)$  tel que pour tout  $\alpha \in I$ ,  $X_\alpha$  est homéomorphe à l'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$  et  $S(G) = \varprojlim X_\alpha$ . Par hypothèse, il existe sur chaque  $G$ -espace  $X_\alpha$  une mesure de probabilité invariante  $\mu_\alpha$ . Par le lemme 2.4, il existe une mesure de probabilité borélienne invariante  $\mu$  sur  $S(G)$ . Donc  $G$  est moyennable. ■

## 2.3 Espace test pour la moyennabilité extrême

Dans cette section, nous utilisons la décomposition du compactifié équivariant de Samuel en limite inverse d'espaces de Cantor obtenue dans la section précédente pour établir que l'espace de Cantor est un espace test pour la moyennabilité extrême des groupes polonais non archimédiens.

### 2.3.1 Généralités sur la moyennabilité extrême

**Définition 2.3.** *Un groupe topologique  $G$  est dit extrêmement moyennable si toute action continue de  $G$  sur un espace compact  $K$  possède un point fixe.*

**Remarque 2.8.** 1. *Il est clair que tout groupe  $G$  extrêmement moyennable est moyennable. L'extrême moyennabilité est donc une propriété plus forte que la moyennabilité d'où la terminologie extrêmement moyennable introduite par Granirer [41].*

2. *Soit  $G$  un groupe topologique. On note  $M(G)$  son espace compact universel.  $G$  est extrêmement moyennable si et seulement si  $M(G)$  est un singleton. En effet, Si  $M(G) = \{x\}$ , soit  $X$  un flot compact de  $G$ , alors il existe un morphisme de flots  $\pi : M(G) \rightarrow X$  et  $\pi(x)$  est un point fixe pour l'action continue de  $G$  sur  $X$ .*

*Si  $G$  est extrêmement moyennable, comme  $G$  opère sur l'espace compact  $M(G)$ , il existe un point fixe  $x_0$  pour l'action de  $G$  sur  $M(G)$ . Autrement dit, on a  $G.x_0 = \{x_0\}$ . Puisque  $M(G)$  est minimal,  $\overline{G.x_0} = M(G)$  et  $M(G) = \{x_0\}$ .*

3. *En général,  $G$  est extrêmement moyennable si et seulement si tout flot minimal de  $G$  est un singleton.*

Le résultat suivant est immédiat.

**Proposition 2.2.** *Un groupe topologique  $G$  est extrêmement moyennable si et seulement si l'action canonique de  $G$  sur son compactifié équivariant de Samuel  $S(G)$  possède un point fixe.*

La technique pour établir le résultat suivant est identique à celle utilisée dans la preuve du théorème 1.10.

**Proposition 2.3.** *Soit  $G$  un groupe topologique.*

1. *Si  $H$  est un groupe topologique tel qu'il existe un homomorphisme continu surjectif de  $G$  sur  $H$  et si  $G$  est extrêmement moyennable, alors  $H$  est extrêmement moyennable.*
2. *S'il existe un sous-espace dense  $A$  de  $G$  tel que tout sous-ensemble fini  $I$  de  $A$  est contenu dans un sous-groupe extrêmement moyennable, alors  $G$  est extrêmement moyennable.*
3. *Si  $H$  est un sous-groupe normal extrêmement moyennable de  $G$  et le groupe quotient  $G/H$  est extrêmement moyennable, alors  $G$  est extrêmement moyennable.*

Les groupes de Lévy constituent une classe importante de groupes extrêmement moyennables.

### 2.3.2 Groupes de Lévy et moyennabilité extrême

**Définition 2.4.** *On appelle mm-espace la donnée d'un triplet  $(X, d, \mu)$  où :*

- 1)  *$X$  est un ensemble non vide,*
- 2)  *$d$  une distance sur  $X$ ,*
- 3)  *$\mu$  une mesure de probabilité sur  $X$ .*

**Définition 2.5.** 1. *Soit  $(X, d, \mu)$  un mm-espace. On appelle fonction de concentration de  $X$  la fonction notée  $\alpha_X$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :*

$$\alpha_X(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \varepsilon = 0 \\ 1 - \inf\{\mu(B_\varepsilon) : B \subseteq X; \mu(B) \geq \frac{1}{2}\} & \text{si } \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Où  $B_\varepsilon$  désigne le voisinage d'ordre  $\varepsilon$  de  $B$ .

2. *Une famille  $(X_n, d_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de mm-espace est dite de Lévy si la suite de fonctions  $(\alpha_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers 0 sur  $]0, +\infty[$ .*

Quelques propriétés des mm-espaces et des familles de Lévy sont condensées dans le résultat suivant :

**Proposition 2.4.** [62]

1. Pour tout mm-espace  $(X, d, \mu)$ , on a :  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \alpha_X(\varepsilon) = 0$ .
2. Une famille  $(X_n, d_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de mm-espace est de Lévy si et seulement si chaque fois qu'un sous-ensemble borelien  $A_n$  de  $X_n$  vérifie :  $\liminf \mu_n(A_n) > 0$  on a pour tout  $\varepsilon > 0$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n((A_n)_\varepsilon) = 1$ .

**Exemple 2.1.** 1. Sur le groupe symétrique  $S_n$  on définit la distance normalisée de Hamming  $d(\sigma, \tau) = \frac{1}{n} |\{i : \sigma(i) \neq \tau(i)\}|$  et la mesure uniforme

$\mu(A) = \frac{|A|}{n}$ . La famille  $(S_n, d, \mu)$  est une famille de Lévy. (Maurey [66]).

2. Soit  $E_n = \{0, 1\}^n$  le cube de Hamming. On définit sur  $E_n$  la mesure normalisée  $P_n(A) = |A| \cdot 2^{-n}$  et la distance normalisée de Hamming :  
 $d(x, y) = \frac{1}{n} |\{i : x_i \neq y_i\}|$ . la famille  $(E_n, d, P_n)$  est une famille de Lévy ([73]).

**Définition 2.6.** Soit  $G$  un groupe métrisable opérant continûment par isomorphismes sur un espace métrique  $(X, d)$ . Le  $G$ -espace  $X$  est dit de Lévy (Gromov et Milman[43]) s'il existe une suite  $(G_\alpha)$  de sous-groupes compacts de  $G$  ordonné par l'inclusion et une suite  $(\mu_\alpha)$  de mesures de probabilités sur  $(X, d)$  telle que :

1.  $\bigcup_\alpha G_\alpha$  est dense dans  $G$
2.  $\mu_\alpha$  est  $G_\alpha$ -invariant pour tout  $\alpha$
3.  $(X, d, \mu_\alpha)$  est une famille de Lévy

Dans le cas particulier où  $X = G$  est muni d'une distance invariante à droite et de l'action à gauche de  $G$  sur lui-même, le groupe  $G$  est dit de Lévy.

**Théorème 2.11.** (Gromov et Milman[43])

Tout groupe de Lévy est extrêmement moyennable.

La référence [36] contient des progrès récents sur la relation entre les familles de Lévy et l'existence de points fixes.

À présent, les exemples de groupes de Lévy sont nombreux et comprennent :

1. Le groupe unitaire  $\mathcal{U}(\ell^2)$ , muni de la topologie forte (Gromov et Milman [43]).
2. Le groupe  $\text{Aut}(X, \mu)$  des automorphismes mesurables préservant la mesure  $\mu$  d'un espace borelien  $(X, \mu)$  muni de la topologie faible (Giordano et Pestov

[38]). Rappelons que la topologie faible sur  $Aut(X, \mu)$  est la topologie la moins fine rendant continue toutes les applications

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_A : & Aut(X, \mu) & \longrightarrow X \\ & T & \longmapsto \Upsilon_A(T) = T(A) \end{array}$$

où  $A$  est un borélien de  $X$ .

3. Le groupe  $Iso(\mathbb{U})$  des isométries de l'espace d'Urysohn  $\mathbb{U}$  muni de la topologie compact-ouvert (Pestov [85]).

La classe des groupes extrêmement moyennables comprend aussi le groupe  $Aut(\mathbb{Q}, \leq)$  des bijections de  $\mathbb{Q}$  sur lui-même qui préservent l'ordre muni de la topologie de la convergence simple (Pestov [84]).

Il existe également des exemples de groupes non-extrêmement moyennables :

1. Les groupes localement compacts (Veech [83]) .
2. Le groupe symétrique infini  $S_\infty$  muni de sa topologie polonaise (Pestov [84]).

### 2.3.3 Espace test pour la moyennabilité extrême

**Théorème 2.12.** *Un groupe polonais non archimédien  $G$  est extrêmement moyennable si et seulement si toute action continue de  $G$  sur l'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$  possède un point fixe.*

**Preuve.** La nécessité est évidente. Montrons la suffisance.

Montrons que l'action canonique de  $G$  sur  $S(G)$  possède un point fixe. Comme  $G$  est polonais et non-archimédien, il existe par le théorème 2.9, un système projectif de  $G$ -espaces  $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, I)$  avec  $X_\alpha \cong D^{\aleph_0}$  pour tout  $\alpha \in I$  tel que  $S(G) = \varprojlim X_\alpha$ .

Par hypothèse, il existe sur chaque  $G$ -espace  $X_\alpha$  un point fixe  $x_\alpha$ . Notons  $\pi_\alpha$  la restriction de la projection  $pr_\alpha$  à  $S(G) = \varprojlim X_\alpha$  et posons  $M_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ . Les applications  $\pi_\alpha$  étant surjectives, on a :  $M_\alpha \neq \emptyset$  pour tout  $\alpha$ . La famille  $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$  est centrée car pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$   $x = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \in \bigcap_{i=1}^n M_{\alpha_i}$ .  $S(G)$  étant compact,  $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \neq \emptyset$ . Si  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \neq \emptyset$ , alors  $x$  est un point fixe pour l'action continue de  $G$  sur  $S(G)$ . ■

La question suivante reste une question ouverte. Nous y apportons une réponse partielle.

**Question 2.1.** *Existe-t-il un espace test compact et métrisable pour les groupes polonais extrêmement moyennables ?*



Le théorème du point fixe de Schauder ([95]) affirme que toute fonction continue de  $I^{\aleph_0}$  dans  $I^{\aleph_0}$  possède un point fixe. En particulier, toute action continue du groupe discret  $\mathbb{Z}$  sur  $I^{\aleph_0}$  par les homéomorphismes possède un point fixe. Ceci permet de conclure que le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  ne peut pas être un espace test pour la moyennabilité extrême des groupes polonais.

En effet, le théorème de Ellis [29] affirme que tout groupe discret agit librement sur un espace compact et par conséquent, n'est pas extrêmement moyennable.

On peut néanmoins observer qu'il existe un espace test compact séparable non nécessairement métrisable pour les groupes polonais extrêmement moyennables.

En effet, notons  $\mathcal{P}_0$  l'ensemble de tous les groupes polonais non-extrêmement moyennables deux à deux non-isomorphes et choisissons pour tout  $G \in \mathcal{P}_0$  un  $G$ -espace compact et métrisable  $X_G$  sans point fixe. L'espace  $X = \prod_{G \in \mathcal{P}_0} X_G$  est un

espace test séparable compact (non nécessairement métrisable) pour la moyennabilité extrême des groupes polonais .

Il est clair que  $G$  opère continûment sur  $X$  sans point fixe par l'action produit.

Il nous suffit pour conclure par le célèbre théorème de Hewitt [47] et Pondiczery [88] de montrer que  $|\mathcal{P}_0| \leq 2^{\aleph_0}$ . Notons  $F_\infty$  le groupe libre avec un nombre infini dénombrable de générateurs. Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des groupes polonais et  $\mathcal{D}$

l'ensemble de toutes les pseudo-métriques sur  $F_\infty$ . Il est clair que  $|\mathcal{D}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}| = 2^{\aleph_0}$ .

Nous allons montrer que  $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{D}|$ .

Soit  $d$  une pseudo-métrique sur  $F_\infty$  invariante à gauche.  $H_d = \{x \in F_\infty, d(x, e) = 0\}$  est un sous-groupe de  $F_\infty$ . La distance défini sur  $F_\infty/H_d$  par  $\widehat{d}(xH_d, yH_d) = d(x, y)$  est invariante par translation à gauche. Notons  $G_d$  le complété de l'espace métrique  $(F_\infty/H_d, \widehat{d})$ . Si  $H_d$  est un sous-groupe normal de  $F_\infty$ , le groupe topologique  $G_d$  est un groupe polonais et chaque groupe polonais est de la forme  $G_d$ . Notons  $\mathcal{D}_N$  le sous-ensemble de  $\mathcal{D}$  constitué des pseudo-métriques  $d$  telles que  $H_d$  soit normal.

Donc l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_N & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ d & \longmapsto & G_d \end{array}$$

est surjective. Ainsi  $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{D}_N| \leq |\mathcal{D}|$ .

**Définition 2.7.** *Un groupe topologique  $G$  est dit monothétique, s'il existe un sous-groupe  $H$  de  $G$  qui est à la fois cyclique et dense*

**Exemple 2.2.** (Glasner [40])

*Soit  $\Gamma$  un groupe localement compact abélien (Par exemple  $\Gamma = \mathbb{R}$ ). Nous notons  $\widetilde{\Gamma}$  le groupe de tous les caractères continus de  $\Gamma$  i.e le groupe des homomorphismes continus de  $\Gamma$  dans le cercle unité  $\mathbb{T}$ . Soit  $E$  un espace localement compact. Nous notons par  $S(E)$  le groupe des fonctions  $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$  continues vérifiant  $|f| = 1$ . Si  $E \subset \Gamma$ , nous notons par  $SU(E)$  le sous-groupe de  $S(E)$  constitué des fonctions qui*

sont uniformément continues (par rapport à la restriction de la structure uniforme canonique du groupe  $\Gamma$  sur  $E$ .)

**Définition 2.8.** Un sous-ensemble fermé  $E \subseteq \Gamma$  est dit de Kronecker si pour tout  $\varepsilon > 0$ , et pour tout  $f \in SU(E)$ , il existe  $\chi \in \tilde{\Gamma}$  tel que  $\sup_{x \in E} |f(x) - \chi(x)| \leq \varepsilon$ .

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de Kronecker du cercle unité  $\mathbb{T}$  et soit  $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$  un espace mesuré. Notons  $G = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ mesurable}, |f| = 1\}$ . Munissons  $G$  de la multiplication point par point et de la distance  $d(f, g) = \int |f - g| d\mu$ . Alors  $G$  est un groupe polonais monothétique. En effet, par définition de  $\Omega$ , l'ensemble des restrictions à  $\Omega$  des caractères continus sur  $\mathbb{T}$  est uniformément dense dans l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega$  à valeurs complexes et de module 1. Donc le sous-groupe  $G_0 = \{\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \chi \text{ est un caractère continu de } \mathbb{T}\}$  est dense dans  $G$ . Puisque le groupe des caractères continus de  $\mathbb{T}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , on conclut que  $G$  est monothétique.

**Définition 2.9.** Un groupe topologique  $G$  est dit solénoïde, s'il existe un morphisme continu  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $G$  dont l'image est partout dense dans  $G$ .

**Remarque 2.9.** Il est clair que tout groupe monothétique ou solénoïde est abélien, donc moyennable.

**Théorème 2.13.** Toute action continue de  $\mathbb{R}$  sur  $I^{\aleph_0}$  possède un point fixe.

**Preuve.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Posons

$$G_n = \frac{1}{2^n} \mathbb{Z} = \left\{ \frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Toute action continue de  $\mathbb{R}$  sur  $I^{\aleph_0}$  induit une action continue de  $G_n$  sur  $I^{\aleph_0}$ . D'après le théorème du point fixe de Schauder, il existe un point fixe pour l'action de  $G_n$  sur  $I^{\aleph_0}$ . Posons

$$F_n = \{x_n \in I^{\aleph_0} : G_n \cdot x_n = x_n\}.$$

Pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  avec  $n < m$ , on a :  $G_n \subset G_m$  et  $F_m \subseteq F_n$ . Ainsi,  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une famille centrée de  $I^{\aleph_0}$ . Donc  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ .

Si  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ , alors  $x$  est un point fixe pour l'action de  $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  sur  $I^{\aleph_0}$ . Si  $x \in \mathbb{R}$ , alors

la suite  $(2^{-n}E(x2^{-n}))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  qui converge vers  $x$ . Donc

$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $x$  est un point fixe pour l'action de  $\mathbb{R}$  sur  $I^{\aleph_0}$ . ■

Par la même démarche, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.14.** *Soit  $G$  un groupe monothétique. Toute action continue de  $G$  sur le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  possède un point fixe.*

De même nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.15.** *Soit  $G$  un groupe solénoïde. Toute action continue de  $G$  sur le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  possède un point fixe.*

**Preuve.** Soit  $G$  un groupe solénoïde opérant continûment sur le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  et soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow G$  un morphisme continue à image dense.  $\mathbb{R}$  opère continûment sur  $I^{\aleph_0}$  par l'action  $(r, x) \longmapsto r.x = f(r)x$ . Par le théorème 2.13, il existe  $\xi \in I^{\aleph_0}$  tel que  $r.\xi = \xi$  pour tout  $r \in \mathbb{R}$ . Soit  $g \in G$  et soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels tel que  $(f(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $g$ . D'une part,  $f(r_n)\xi$  converge vers  $g\xi$  et d'autre part  $f(r_n)\xi = r_n.\xi$ . Donc  $g\xi = \xi$  ■

La question suivante reste une question ouverte.

**Question 2.2.** *Une action continue d'un groupe polonais moyennable sur le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  possède-t-elle un point fixe ? Même question pour un groupe moyennable discret.*

# Chapitre 3

## Espaces test pour la moyennabilité topologique

### 3.1 Généralités sur la moyennabilité topologique

Dans toute la suite,  $Z$  désignera un espace topologique discret dénombrable. Notons  $\mathbb{C}^Z = \{u : Z \rightarrow \mathbb{C}\}$  l'espace vectoriel réel des fonctions de  $Z$  dans  $\mathbb{C}$ . Rappelons que  $\ell^\infty(Z)$  est le sous-espace de  $\mathbb{C}^Z$  formé des fonctions bornées dans  $\mathbb{C}$  et que  $\ell^1(Z)$  est le sous-espace vectoriel de  $\ell^\infty(Z)$  défini par

$$\ell^1(Z) = \{u \in \mathbb{C}^Z : \|u\|_1 = \sum_{z \in Z} |u_z| < \infty\}.$$

On a un plongement isométrique d'espaces vectoriels normés

$$j : (\ell^1(Z), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\ell^\infty(Z)^*, \|\cdot\|_{\ell^\infty(Z)^*})$$

défini par :  $j(v)(u) = \sum_{z \in Z} u_z v_z$  pour tout  $v \in \ell^1(Z)$  et  $u \in \ell^\infty(Z)$ . L'ensemble  $\mathbb{P}(Z)$  des mesures de probabilités sur  $Z$  est la partie de  $\ell^1(Z)$  définie par

$$\mathbb{P}(Z) = \{v \in \ell^1(Z) : v \geq 0 \text{ et } \|v\|_1 = 1\}.$$

En d'autres termes  $\mathbb{P}(Z)$  est l'ensemble des fonctions  $b : Z \rightarrow [0, 1]$  telles que :  $\sum_{z \in Z} b(z) = 1$ . En général, nous verrons  $\mathbb{P}(Z)$  comme une partie de  $\ell^1(Z)$  que nous le munirons de la topologie vague.

Si  $G$  opère sur  $Z$  (dans la suite,  $Z$  sera généralement  $G$  et l'action sera l'action canonique par multiplication de  $G$  sur  $G$ ), alors  $G$  opère aussi sur  $\mathbb{P}(Z)$  par l'action  $gb(z) = b(g^{-1}z)$

**Définition 3.1.** Soit  $G$  un groupe discret dénombrable opérant par homéomorphismes sur un espace compact  $X$ . L'action de  $G$  sur  $X$  est moyennable s'il existe une suite  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $X$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que  $b^n$  est continue pour tout  $n \in \mathbb{N}$  pour la topologie vague sur  $\mathbb{P}(G)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0$  pour tout  $g \in G$ .

**Définition 3.2.** Un groupe discret dénombrable  $G$  est dit topologiquement moyennable s'il existe un espace compact  $X$  tel que :

1.  $G$  opère par homéomorphisme sur  $X$ ,
2. l'action de  $G$  sur  $X$  est moyennable.

Rappelons le critère de moyennabilité classique suivant dit condition de Reiter :

**Théorème 3.1.** (Reiter [81]) Soit  $p$  un nombre réel tel que  $1 \leq p < \infty$ . Un groupe discret dénombrable  $G$  est moyennable si et seulement s'il vérifie la condition de Reiter : Pour tout compact  $C \subset G$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h \in \{f \in L^p(G) : f \geq 0, \|f\|_p = 1\}$  tel que  $\|gh - h\|_p < \varepsilon \quad \forall g \in C$ .

Nous allons utiliser ce théorème pour établir le lien entre la moyennabilité et la moyennabilité topologique

**Théorème 3.2.** Soit  $G$  un groupe discret dénombrable. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $G$  est moyennable.
2. L'action triviale de  $G$  sur tout singleton est moyennable.

### Preuve.

$1 \implies 2$  Soit  $G$  un groupe discret dénombrable moyennable. Supposons que  $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ . Par la condition de Reiter, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $F_n = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , il existe une application  $b^n : X \rightarrow \mathbb{P}(G)$ , où  $X = \{x\}$  tel que  $\|g_i b_x^n - b_x^n\|_1 < \frac{1}{n} \quad \forall i \leq n$ . Ainsi, pour tout  $g \in G$ , il existe  $i \in \mathbb{N}^*$  tel que  $g = g_i$  et ainsi  $g \in F_n$  pour tout  $n \geq i$ . Ceci implique que  $\|g_i b_x^n - b_x^n\|_1 < \frac{1}{n}$ .  
Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0$

2  $\implies$  1 Soit  $G$  un groupe dénombrable tel que son action sur un singleton  $X = \{x\}$  est moyennable. Alors il existe une suite d'applications  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $X$  dans  $\mathbb{P}(G)$  continue pour la topologie vague sur  $\mathbb{P}(G)$  et telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0.$$

Soit  $F$  un sous-ensemble fini de  $G$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque l'action est moyennable, il existe  $N$  tel que pour tout  $n > N$  et pour tout  $g \in F$ , on a :  $\|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 < \varepsilon$ . En d'autres mots,  $G$  vérifie la condition de Reiter pour  $p = 1$ .

■

**Exemple 3.1.** 1. *Tout groupe moyennable  $G$  est topologiquement moyennable. Ceci est une conséquence immédiate du théorème 3.2.*

2. *Le groupe libre à deux générateurs  $F_2$  est topologiquement moyennable ([4] exemple 2.7, [80] exemple 2.2). La moyennabilité topologique est donc une propriété plus générale que la moyennabilité au sens classique.*
3. *Soit  $G$  un groupe topologique. Si  $G$  est compact, alors l'action à gauche de  $G$  sur lui même est moyennable. En effet, pour tout  $n \geq 1$ , définissons  $b^n : G \rightarrow \mathbb{P}(G)$  par  $b^n(x) = \delta_x$  pour tout  $x \in G$ . Comme  $tb^n(x) = b^n(tx)$  pour tous  $t, x \in G$ , la suite  $(b^n)_{n \geq 1}$  vérifie les conditions de la définition 3.1.*

**Remarque 3.1.** *Certains auteurs utilisent moyennabilité à l'infini ou encore groupe de Higson-Roe pour désigner les groupes topologiquement moyennables.*

## 3.2 Moyennabilité topologique et Compactifié de Stone-Čech

**Lemme 3.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux  $G$ -espaces compacts. Si  $G$  opère moyennablement sur  $X$  et  $f : Y \rightarrow X$  est une application équivariante, alors l'action de  $G$  sur  $Y$  est moyennable.*

**Preuve.** Soit  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de  $X$  dans  $\mathbb{P}(G)$  continue pour la topologie vague sur  $\mathbb{P}(G)$  et telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0$  pour tout  $g \in G$  et soit  $f : Y \rightarrow X$  une application équivariante. Posons

$$\begin{aligned} c^n : Y &\rightarrow \mathbb{P}(G) \\ y &\mapsto c_y^n = b_{f(y)}^n \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned}
\sup_{y \in Y} \|gc_y^n - c_{gy}^n\|_1 &= \sup_{y \in Y} \|gb_{f(y)}^n - b_{f(gy)}^n\|_1 \\
\text{Alors, on a :} \quad &= \sup_{y \in Y} \|gb_{f(y)}^n - b_{gf(y)}^n\|_1 \\
&= \sup_{x \in X} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1
\end{aligned}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y} \|gc_y^n - c_{gy}^n\|_1 = 0$  ■

**Lemme 3.2.** *Si  $G$  possède une action moyennable sur un espace compact, alors  $G$  possède une action moyennable sur son compactifié de Stone-Ćech  $\beta G$*

Preuve. Soit  $g \in G$ , notons

$$\begin{aligned}
L_g : G &\longrightarrow G \\
h &\longmapsto L_g(h) = gh
\end{aligned}$$

l'action continue à gauche de  $G$  sur  $G$ .  $L_g$  se prolonge de manière unique en  $\tilde{L}_g : \beta G \longrightarrow \beta G$  de telle manière que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{L_g} & G \\
\downarrow & & \downarrow \\
\beta G & \xrightarrow{\tilde{L}_g} & \beta G
\end{array}$$

soit commutatif.

L'application

$$\begin{aligned}
G &\longrightarrow \beta G \\
g &\longmapsto \tilde{L}_g
\end{aligned}$$

permet de définir une action par homéomorphismes de  $G$  sur  $\beta G$ .

Soit  $X$  un  $G$ -espace compact tel que l'action de  $G$  sur  $X$  est moyennable. L'action  $\tau : G \times X \longrightarrow X$  permet de définir une application équivariante  $\tilde{\tau} : \beta G \longrightarrow X$ .

L'action de  $G$  sur  $\beta G$  est donc moyennable par le Lemme 3.1 ■

Nous allons utiliser les lemmes suivants :

**Lemme 3.3.** ([49], Lemme 3.7) *Un groupe discret dénombrable  $G$  admet une action moyennable sur son compactifié de Stone-Ćech  $\beta G$  si et seulement s'il existe une suite d'applications  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $G$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que :*

1. *Pour tout  $n$ , l'image de l'application  $b^n$  est contenu dans un sous-ensemble compact de  $\mathbb{P}(G)$  pour la topologie vague.*

2. Pour tout  $g \in G$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h \in G} \|gb_h^n - b_{gh}^n\|_1 = 0$

**Remarque 3.2.** 1. Si  $b \in \ell^1(Z)$  et  $F$  est un sous-ensemble de  $Z$ , alors nous noterons  $b|_F$  la fonction définie sur  $Z$  par

$$b|_F(z) = \begin{cases} b(z) & \text{si } z \in F \\ 0 & \text{si } z \notin F \end{cases}$$

2. Le résultat suivant apparait dans [49]. Mais l'auteur ne fournit pas une preuve complète.

**Lemme 3.4.** Soit  $Z$  un ensemble discret. Pour tout sous-ensemble  $B$  de  $\mathbb{P}(Z)$  compact pour la topologie vague et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $F \subset Z$  fini, tel que  $\|b - b|_F\| < \varepsilon$  pour tout  $b \in B$ .

**Preuve.** Fixons  $\varepsilon > 0$ . Pour tout sous-ensemble fini  $H \subset Z$ , posons

$$U_H = \{b \in \mathbb{P}(Z) : \|b|_H\|_1 > 1 - \varepsilon\}.$$

Nous allons montrer que les ensembles  $U_H$  forment un recouvrement étoile-faible ouvert de  $\mathbb{P}(Z)$ . Fixons  $p \in Z$  et soit  $g_p$  la fonction définie sur  $c_0(Z)$  par

$$g_p(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors,

$$b(p) = \langle b, g_p \rangle = \sum_{z \in Z} b(z)g_p(z).$$

Ainsi, l'application  $b \mapsto b(p)$  qui coïncide avec l'application  $b \mapsto \langle b, g_p \rangle$  est continue pour la topologie vague pour tout point  $p \in Z$ .

Maintenant pour un sous-ensemble fini  $H = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  de  $Z$ , les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(Z) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ b & \longmapsto & b(p_i) \end{array}$$

sont continues pour la topologie vague pour  $i = 1, 2, \dots, k$ . Ainsi l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(Z) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ b & \longmapsto & b(p_1) + b(p_2) + \dots + b(p_k) \end{array}$$



est continue pour la topologie vague. Comme

$$b(p_1) + b(p_2) + \dots + b(p_k) = \|b|_H\|_1,$$

l'application  $b \mapsto \|b|_H\|_1$  est continue. Donc pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$\{b \in \mathbb{P}(Z) : \|b|_H\|_1 > 1 - r\}$$

est un ouvert. Ainsi,  $U_H$  est un ouvert pour tout  $H \subset Z$  fini.

Finalemement pour tout  $b \in \mathbb{P}(Z)$ , on a :  $\sum_{z \in Z} b(z) = 1$ . Comme cette série est à

termes positifs, il existe un sous-ensemble fini  $H$  de  $Z$  tel que  $\sum_{z \in Z \setminus H} b(z) < \varepsilon$ . Ainsi

$\sum_{z \in H} b(z) > 1 - \varepsilon$  et  $\|b|_H\|_1 > 1 - \varepsilon$  i.e  $b \in U_H$ . Donc les ensembles  $U_H$  forment un recouvrement étoile-faible de  $\mathbb{P}(Z)$  lorsque  $H$  parcourt l'ensemble des sous-ensemble fini de  $Z$  et  $\varepsilon$  les nombres réels positifs. Ainsi, il existe des sous-ensembles finis

$H_1, H_2, \dots, H_N$  de  $Z$  tel que  $B \subset \bigcup_{i=1}^N U_{H_i}$ . Prendre  $F = \bigcup_{i=1}^N H_i$ . ■

**Lemme 3.5.** *Un groupe discret dénombrable  $G$  admet une action moyennable sur son compactifié de Stone-Čech  $\beta G$  si et seulement s'il existe une suite  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $G$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que :*

1. *Pour tout  $n$ , il existe  $F_n \subset G$  fini tel que  $\text{supp}(b_g^n) \subset F_n$  pour tout  $g \in G$*
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h \in G} \|gb_h^n - b_{gh}^n\|_1 = 0$  *pour tout  $g \in G$*

### Preuve.

$\implies$  Supposons  $G$  topologiquement moyennable. Il existe par le lemme 3.3 une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $G$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b^n(G)$  est contenu dans une partie compacte  $K_n$  de  $\mathbb{P}(G)$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h \in G} \|gb_h^n - b_{gh}^n\|_1 = 0 \text{ pour tout } g \in G.$$

$K_n$  étant une partie compacte de  $\mathbb{P}(G)$ , d'après le lemme 3.4, pour tout  $\frac{\varepsilon}{5} > 0$ , il existe un sous-ensemble fini  $F_n$  de  $G$  tel que  $\|b - b|_{F_n}\|_1 < \frac{\varepsilon}{5}$  pour tout  $b \in b^n(G)$ . Définissons  $\forall n \in \mathbb{N}$ , les applications  $w^n$  de  $G$  dans  $\mathbb{P}(G)$  par

$$w_g^n = \frac{b_g^n|_{F_n}}{\|b_g^n|_{F_n}\|_1}.$$

Ainsi, nous avons les observations suivantes :

- (a)  $\text{supp}(w_g^n) \subset F_n$  pour tout  $g \in G$  et

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h \in G} \|gw_h^n - w_{gh}^n\|_1 = 0$  pour tout  $g \in G$ .

En effet, à partir de

$$\|b_g^n|_{F_n}\|_1 > 1 - \frac{\varepsilon}{5},$$

on a :

$$\|gw_h^n - gb_h^n|_{F_n}\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{5}.$$

En prenant  $n$  suffisamment grand, nous obtenons :

$$\|gb_h^n - b_{gh}^n\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{5}$$

(puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h \in G} \|gb_h^n - b_{gh}^n\|_1 = 0$  pour tout  $g \in G$ ).

De plus, on a :

$$\begin{aligned} & \|gw_h^n - w_{gh}^n\|_1 \\ &= \|gw_h^n - gb_h^n|_{F_n} + gb_h^n|_{F_n} - gb_h^n + gb_h^n - b_{gh}^n + b_{gh}^n - b_{gh}^n|_{F_n} + b_{gh}^n|_{F_n} - w_{gh}^n\|_1 \\ &\leq \|gw_h^n - gb_h^n|_{F_n}\|_1 + \|gb_h^n|_{F_n} - gb_h^n\|_1 + \|gb_h^n - b_{gh}^n\|_1 \\ &+ \|b_{gh}^n - b_{gh}^n|_{F_n}\|_1 + \|b_{gh}^n|_{F_n} - w_{gh}^n\|_1 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  Supposons qu'il existe une suite  $(w^n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $G$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que les conditions 1 et 2 sont remplies. Pour tout  $n$ , il existe  $F_n$  fini tel que  $\text{supp}(b_g^n) \subset F_n$  pour tout  $g \in G$ . Puisque l'ensemble des mesures sur  $G$  à support fini est un sous-espace compact de  $\mathbb{P}(G)$ ,  $w^n(G)$  est contenu dans un sous-espace compact de  $\mathbb{P}(G)$ . Donc l'action de  $G$  sur son compactifié de Stone-Céché est moyennable par le lemme 3.3.

■

### 3.3 Espaces test pour la moyennabilité topologique

En utilisant les notations du chapitre précédent, on a le lemme suivant :

**Lemme 3.6.** *Soit  $G$  un groupe discret dénombrable moyennable à l'infini. Notons  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite d'applications correspondantes de  $S(G) = \beta G$  dans  $\mathbb{P}(G)$  et  $F = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$ . Alors l'action de  $G$  sur  $X_F$  est moyennable.*

**Preuve.**  $G$  étant moyennable à l'infini, alors il existe une suite  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $\beta G$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \beta G} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0$  pour tout  $g \in G$ . Rappelons que  $G$  étant discret et dénombrable,  $S(G) = \beta G$ .

Pour tout  $g \in G$ , notons

$$\begin{aligned}\bar{g} : \beta G &\longrightarrow \beta G \\ x &\longmapsto gx\end{aligned}$$

l'homéomorphisme de  $\beta G$  sur lui même produit par  $g$ . Considérons le produit diagonal

$$f = \Delta_{(g,n) \in G \times \mathbb{N}}(b_n \circ \bar{g}) : \beta G \longrightarrow (\mathbb{P}(G))^{G \times \mathbb{N}}$$

défini par

$$f(x) = (b_{gx}^n)_{(g,n) \in G \times \mathbb{N}}.$$

Il est clair que  $f$  est continue. La relation d'équivalence  $\mathcal{R}_F$  est définie sur  $\beta G$  par :

$$x\mathcal{R}_F y \iff b_{gx}^n = b_{gy}^n$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $g \in G$ . Notons encore  $f$  l'application  $f : \beta G \longrightarrow f(\beta G)$ , et  $\pi_F : \beta G \longrightarrow \beta G/\mathcal{R}_F$  la surjection canonique. Il existe une application continue  $\bar{f}$  telle que  $f = \bar{f} \circ \pi_F$ . Posons  $X_F = \beta G/\mathcal{R}_F$ . Considérons l'application  $\tilde{b}^n : f(\beta G) \longrightarrow \mathbb{P}(G)$  définie par  $\tilde{b}^n = \pi_{e,n}$  où  $\pi_{e,n}$  est la projection. Ainsi, l'application

$$c^n = \tilde{b}^n \circ \bar{f} : X_F \longrightarrow \mathbb{P}(G)$$

est continue pour la topologie vague sur  $\mathbb{P}(G)$ .

Soit  $g \in G$ , on a :

$$\begin{aligned}\sup_{[x] \in X_F} \|gc_{[x]}^n - c_{g[x]}^n\|_1 &= \sup_{[x] \in X_F} \|g(\tilde{b}^n \circ \bar{f})_{[x]} - (\tilde{b}^n \circ \bar{f})_{g[x]}\|_1 \\ &= \sup_{[x] \in X_F} \|g(\tilde{b}^n(\bar{f}([x]))) - \tilde{b}^n(\bar{f}(g[x]))\|_1 \\ &= \sup_{x \in \beta G} \|g(\tilde{b}^n(\bar{f}([x]))) - \tilde{b}^n(\bar{f}([gx]))\|_1 \\ &= \sup_{x \in \beta G} \|g(\tilde{b}^n(f(x))) - \tilde{b}^n(f(gx))\|_1 \\ &= \sup_{x \in \beta G} \|g(\tilde{b}^n(b_{hx}^n))_{(h,n) \in G \times \mathbb{N}} - \tilde{b}^n((b_{hgx}^n))_{(h,n) \in G \times \mathbb{N}}\|_1 \\ &= \sup_{x \in \beta G} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1\end{aligned}$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[x] \in X_F} \|gc_{[x]}^n - c_{g[x]}^n\|_1 = 0$  ■

**Corollaire 3.1.** *Un groupe discret dénombrable  $G$  admet une action moyennable sur un espace compact et métrisable si et seulement si son action sur son Compactifié de Stone-Ćech  $\beta G$  est moyennable.*

**Preuve.** Ceci est une conséquence immédiate du lemme 3.2 et du lemme 3.6. ■

**Théorème 3.3.** *Un groupe discret dénombrable  $G$  est moyennable à l'infini si et seulement s'il admet une action moyennable sur l'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$ .*

**Preuve.** La suffisance est évidente. Montrons la nécessité.

Si  $G$  est moyennable à l'infini, alors  $G$  possède une action moyennable sur son compactifié de Stone-Čech  $\beta G$ . Ainsi, il existe une suite  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $\beta G$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \beta G} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0$  pour tout  $g \in G$

Pour tout  $g \in G$ , notons

$$\begin{aligned} \bar{g} : \beta G &\longrightarrow \beta G \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

l'homéomorphisme de  $\beta G$  sur lui même. L'espace  $b^n(\beta G)$  étant compact et métrisable, il existe une surjection continue  $f^n : D^{\aleph_0} \longrightarrow b^n(\beta G)$ .

Soit  $g \in G$ , alors  $b_g^n \in b^n(\beta G)$ . Puisque  $f^n$  est surjective, il existe  $c_g \in D^{\aleph_0}$  tel que  $f^n(c_g) = b_g^n$ . On a ainsi une application

$$\begin{aligned} T^n : G &\longrightarrow D^{\aleph_0} \\ g &\longmapsto c_g \end{aligned}.$$

Cette application se prolonge de manière unique en une application continue

$$\beta T^n : \beta G \longmapsto D^{\aleph_0}.$$

Pour tout  $g \in G$ , on a :

$$(f^n \circ \beta T^n)(g) = f^n(\beta T^n(g)) = f^n(c_g) = b_g^n.$$

Ainsi,  $f^n \circ \beta T^n = b^n$  sur  $G$ . Puisque  $G$  est dense dans  $\beta G$ ,  $f^n \circ \beta T^n = b^n$  sur  $\beta G$ .

Posons :  $c^n = \beta T^n \circ \bar{g} : \beta G \longrightarrow D^{\aleph_0}$ ,  $F = \{c^n : n \in \mathbb{N}\}$ . Notons encore

$f^n : D^{\aleph_0} \longrightarrow f^n(D^{\aleph_0})$ . Posons

$\tilde{c}^n = f^n \circ \beta T^n \circ \bar{g} : \beta G \longrightarrow f^n(D^{\aleph_0})$ ,  $F = \{\tilde{c}^n : n \in \mathbb{N}\}$  et  $X = f^n(D^{\aleph_0})$ . Alors

$X_F \cong D^{\aleph_0}$  et l'action de  $G$  sur  $X_F$  est moyennable à l'infini par le lemme 3.6. ■

**Remarque 3.3.** *Le résultat précédent est le principal résultat de [?]. La preuve que nous venons d'effectuer est différente de celle de [?].*

**Lemme 3.7.** *Soit  $G$  un groupe discret dénombrable. Si l'action de  $G$  sur l'ensemble de Cantor  $D^{\aleph_0}$  est moyennable, alors les images des  $b^n$  peuvent être choisis d'images finies.*

**Preuve.** Soit  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suites d'applications de  $D^{\aleph_0}$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D^{\aleph_0}} \|gb_x^n - b_{gx}^n\|_1 = 0$  pour tout  $g \in G$ . Puisque l'espace de Cantor  $D^{\aleph_0}$  a la

dimension de Lebesgue zéro, il existe une partition finie  $\gamma = (A_i)_{i=1,2,\dots,k_n}$  de  $D^{\aleph_0}$  en sous-ensembles ouverts et fermés, telle que l'image par  $b^n$  de chaque élément de  $\gamma$  est contenue dans une des boules  $B_{\frac{1}{n}}$  de rayon  $1/n$  dans  $\ell^1(G)$ . Notons  $c_i$  les centres des boules correspondantes. Pour tout  $A_i \in \gamma$ , considérons l'application  $(b^n)'$  définie par :

$$(b^n)'_x = c_i \text{ si } x \in A_i.$$

Soit  $x \in D^{\aleph_0}$ , il existe par définition de  $b^n$  et  $(b^n)'$ , une boule  $B_{\frac{1}{n}}$  telle que :

$$\|b^n_x - (b^n)'_x\|_1 \leq \sup_{p,q \in B_{\frac{1}{n}}} \|p - q\|_1 = \text{diam}(B_{\frac{1}{n}}) = \frac{2}{n}.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D^{\aleph_0}} \|g(b^n)'_x - (b^n)'_{gx}\|_1 = 0.$$

■

**Théorème 3.4.** *Un groupe discret dénombrable  $G$  est moyennable à l'infini si et seulement s'il admet une action moyennable sur le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$ .*

**Preuve.** La suffisance est évidente. Montrons la nécessité .

Si  $G$  est moyennable à l'infini, alors  $G$  admet une action moyennable sur l'ensemble de Cantor. Ainsi, il existe une suite  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $D^{\aleph_0}$  dans  $\mathbb{P}(G)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D^{\aleph_0}} \|gb^n_x - b^n_{gx}\|_1 = 0$  pour tout  $g \in G$ .

Par le lemme 3.5, on peut supposer sans perte de généralité que pour tout  $n$ , il existe  $F_n \subseteq G$  fini tel que  $\text{supp}(b^n_x) \subset F_n$  pour tout  $x \in D^{\aleph_0}$ . Autrement dit,  $b^n(D^{\aleph_0})$  est contenu dans un sous-espace de dimension finie  $V$  de  $\mathbb{P}(G)$ . Par le lemme 3.7, supposons que les images des  $b^n$  sont finies et notons  $(c_i)_{i \in I_n}$  où  $I_n$  est fini les images de tous les  $b^n$ . Posons  $A_i = (b^n)_{c_i}^{-1}$  et considérons les applications

$$\begin{aligned} c^n : \mathbb{P}(D^{\aleph_0}) &\longrightarrow \mathbb{P}(G) \\ \mu &\longmapsto \sum_{i=1}^n \mu(A_i) c_i \end{aligned}$$

Les applications  $c^n$  sont clairement affines. Ce sont précisément les prolongements affines des applications  $b^n$  sur  $\mathbb{P}(D^{\aleph_0})$ . Les  $c^n$  sont continues rapport à la topologie vague sur  $\mathbb{P}(D^{\aleph_0})$ .

En effet, les applications  $b^n : D^{\aleph_0} \longrightarrow V$  sont continues.

Si  $\phi$  une fonctionnelle linéaire sur  $V$ , alors  $\phi \circ b^n$  est une fonction continue sur  $D^{\aleph_0}$ .

Par définition de la topologie vague sur  $\mathbb{P}(D^{\aleph_0})$ , l'extension unique,  $\widetilde{\phi \circ b^n}$ , de  $\phi \circ b^n$

sur  $P(D^{\aleph_0})$  est continue. Par unicité du prolongement,  $\widetilde{\phi \circ b^n} = \phi \circ \widetilde{b^n} = \phi \circ c^n$  sur  $P(D^{\aleph_0})$ . Ainsi,  $c^n$  est continue par rapport à la topologie vague sur  $P(D^{\aleph_0})$ .

Notons  $\mathbb{P}_0(D^{\aleph_0})$  le sous-espace de  $\mathbb{P}(D^{\aleph_0})$  formé des mesures à support fini.

Soit  $\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_{x_i} \in \mathbb{P}_0(D^{\aleph_0})$ , on a :  $c_\mu^n = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_{\delta_{x_i}}^n$ . Or

$$c_{\delta_{x_i}}^n = \sum_{j=1}^n \delta_{x_i}(A_j) c_j = c_i = b_{x_i}^n.$$

D'où

$$c_\mu^n = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_{x_i}^n.$$

De même,

$$c_{g\mu}^n = \sum_i \alpha_i b_{gx_i}^n,$$

car

$$g\mu = g \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_{x_i} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_{gx_i}.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$\|gc_\mu^n - c_{g\mu}^n\|_1 = \|\sum_i \alpha_i gb_{x_i}^n - \sum_i \alpha_i b_{gx_i}^n\|_1 \leq \sum_i \alpha_i \|gb_{x_i}^n - b_{gx_i}^n\|_1 \leq \sum_i \alpha_i \epsilon = \epsilon.$$

$\mathbb{P}_0(D^{\aleph_0})$  étant dense dans  $\mathbb{P}(D^{\aleph_0})$  pour la topologie vague et les applications  $c^n$  étoile-faible continues, on a :

$$\sup_{\mu \in \mathbb{P}(D^{\aleph_0})} \|gc_\mu^n - c_{g\mu}^n\|_1 < \varepsilon.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \mathbb{P}(D^{\aleph_0})} \|gc_\mu^n - c_{g\mu}^n\|_1 = 0.$$

On conclut que l'action de  $G$  sur  $\mathbb{P}(D^{\aleph_0})$  est moyennable. Par le théorème de Keller,  $\mathbb{P}(D^{\aleph_0})$  est homéomorphe à  $I^{\aleph_0}$ . Donc l'action de  $G$  sur  $I^{\aleph_0}$  est moyennable. ■

# Chapitre 4

## Groupe des isométries de l'espace d'Urysohn-Katětov

Dans ce chapitre, on appelle application isométrique ou plongement isométrique toute application  $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$  telle que  $d'(f(a), f(b)) = d(a, b)$  pour tous  $a, b \in X$ . Si  $f$  est de plus bijective, on dira que  $f$  est une isométrie.

### 4.1 Généralités sur les groupes universels

**Définition 4.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une classe d'espaces topologiques.  $X \in \mathcal{C}$  est dit universel pour cette classe si pour tout  $Y \in \mathcal{C}$ , il existe un homéomorphisme de  $Y$  sur un sous-espace de  $X$ .

L'espace de Cantor  $D^{\aleph_0}$  est par exemple universel pour la classe des espaces topologiques métrisables séparables et de dimension de Lebesgue 0 ([30]).

**Définition 4.2.** Un groupe topologique  $G$  est dit universel pour une classe  $\mathcal{C}$  de groupes topologiques si pour tout groupe topologique  $H \in \mathcal{C}$ , il existe un isomorphisme de groupes topologiques de  $H$  sur un sous-groupe de  $G$ .

En réponse à une question de Ulam (cf. Problème 103 dans [65]), Uspenskij montre en 1986 dans ([100]) que le groupe  $\text{Homeo}(I^{\aleph_0})$  de tous les homéomorphismes du cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  sur lui-même muni de la topologie compact-ouvert est universel pour la classe des groupes métrisables et séparables. Quelques années plus tard, il démontre dans [101] que le groupe  $\text{Iso}(\mathbb{U})$  des isométries de l'espace universel

polonais d'Urysohn  $\mathbb{U}$  sur lui-même muni de la topologie de la convergence simple est universel pour la même classe de groupes topologiques. La question d'existence d'un groupe topologique universel pour la classe des groupes de poids non dénombrables reste ouverte. Cette question sera traitée à la fin de ce chapitre.

## 4.2 Le Théorème d'Uspenkiĭ

### 4.2.1 Espace Universel d'Urysohn

L'espace universel polonais d'Urysohn a été construit en réponse à la question suivante posée par Fréchet : existe-t-il un espace métrique séparable  $X$  universel pour la classe des espaces métriques séparables ? C'est en 1925 qu'Urysohn apporte une réponse par l'affirmative à cette question dans [98]. Cette section regroupe la construction de Katětov ([56]) de l'espace universel polonais d'Urysohn et les propriétés générales de cet espace. Elle est particulièrement inspirée de Melleray ([70]) et Pestov ([83]).

**Définition 4.3.** *L'espace métrique universel polonais d'Urysohn  $\mathbb{U}$  est caractérisé à isométrie près par les propriétés suivantes :*

1.  $\mathbb{U}$  est complet et séparable
2.  $\mathbb{U}$  contient une copie isométrique de tout autre espace métrique complet et séparable ( $\mathbb{U}$  est universel)
3. Toute isométrie entre deux sous-ensembles finis de  $\mathbb{U}$  se prolonge en une isométrie de  $\mathbb{U}$  ( $\mathbb{U}$  est  $\omega$ -homogène)

Le résultat suivant est démontré par Urysohn dans [?] (voir aussi [83]).

**Théorème 4.1.** *L'espace métrique séparable universel d'Urysohn  $\mathbb{U}$  existe et est unique à isométrie près.*

**Remarque 4.1.** *Le résultat précédent a été démontré par Urysohn en 1925. La construction d'Urysohn a été longtemps éclipsée par le célèbre résultat de Banach et Mazur qui établit l'universalité de  $C([0, 1])$  dans la classe des espaces métriques séparables et complets. L'espace  $C([0, 1])$  a néanmoins la faiblesse de ne pas être  $\omega$ -homogène. Ce résultat de Banach et Mazur a contribué à faire tomber dans l'oubli l'espace d'Urysohn. Ce dernier n'a été que très peu étudié pendant 60 ans, à l'exception d'articles de Sierpinski ([96]) et Huhunaisvili ([50]).*

*En 1986, Katětov ([56]) donne une nouvelle construction de  $\mathbb{U}$ , qui va considérablement relancé l'intérêt pour cet espace. Le théorème d'Uspenkiĭ utilise la construction de Katětov de l'espace universel polonais d'Urysohn  $\mathbb{U}$ .*



**Définition 4.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une fonction  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$  est dite de Katětov si :  $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y)$  pour tous  $x, y \in X$

**Remarque 4.2.** On note  $E(X)$  l'ensemble des fonctions de Katětov sur  $X$

1. Ces fonctions correspondent en réalité aux extensions métriques de  $X$  par un point de la façon suivante : si  $f \in E(X)$ , on peut définir une distance sur l'espace  $X \cup \{f\}$  en posant :  $d(x, f) = f(x)$  pour tout  $x \in X$ .

Dire que  $f$  est une fonction de Katětov, revient à dire que  $d$  ainsi définie est une distance ; autrement dit, toutes les extensions métriques de  $X$  par un point sont obtenues de cette façon.

2. Le grand intérêt des fonctions de Katětov est qu'il existe une distance naturelle entre fonctions de Katětov.

En effet, si  $f, g \in E(X)$  et  $x_0, x \in X$ , alors on a :

$$|f(x) - d(x, x_0)| \leq f(x_0) \text{ et } |g(x) - d(x, x_0)| \leq g(x_0)$$

Par conséquent,  $|f(x) - g(x)| \leq f(x_0) + g(x_0)$ , donc  $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$  est fini.

Toute différence de fonctions de Katětov est donc une fonction bornée et on peut donc poser :

$$d_X^E(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

3. Puisqu'on veut voir  $E(X)$  comme l'espace des extensions métriques de  $X$  par un point, il est naturel de voir  $X$  comme un sous-espace de  $E(X)$ , celui des extensions triviales par un point (i.e le point qu'on ajoute était déjà dans  $X$ ). Analytiquement, ceci se fait via l'application de Kuratowski  $x \longmapsto \delta_x$  définie par :  $\delta_x(x') = d(x, x')$  pour tout  $x' \in X$ .

L'inégalité triangulaire permet de vérifier que  $x \longmapsto \delta_x$  est un plongement isométrique de  $X$  dans  $E(X)$ .

4. En général, si  $x \in X$  et  $f \in E(X)$ , alors  $d_X^E(f, \delta_x) = f(x)$ . En effet, puisque  $f$  est de Katětov, nous avons  $f(y) - d(x, y) \leq f(x)$  et  $d(x, y) - f(y) \leq f(x)$  pour tout  $y \in X$ . Ainsi,  $d_X^E(f, \delta_x) = \sup_{y \in X} |f(y) - d(x, y)| \leq f(x)$  et en faisant  $y = x$ , on obtient l'égalité.

5. Dans la suite, lorsqu'on écrira  $X \subset E(X)$ , on identifiera toujours  $X$  à son image dans  $E(X)$  par l'application de Kuratowski

**Définition 4.5.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $Y \subset X$  une partie de  $X$ . Pour toute  $f \in E(Y)$ , on définit son extension de Katětov  $k_Y(f)$  à  $X$  par :

$$k_Y(f)(x) = \inf_{y \in Y} \{f(y) + d(y, x)\},$$

pour tout  $x \in X$

**Remarque 4.3.** 1. Si  $f \in E(X)$  et  $Y \subset X$  vérifient :

$\forall x \in X, f(x) = \inf_{y \in Y} \{f(y) + d(y, x)\}$ , on dira que  $f$  est contrôlée par  $Y$  ou que  $Y$  est un support pour  $f$ .

Par exemple, la fonction de distance

$$\begin{aligned} f_{x_0} : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_{x_0}(x) = d(x, x_0) \end{aligned}$$

est contrôlée par le singleton  $\{x_0\}$ .

2. En général,  $E(X)$  n'est pas séparable même si  $X$  l'est. C'est pourquoi, on considère le sous-espace  $E(X, \omega) = \{f \in E(X) : f \text{ a un support fini}\}$  de  $E(X)$ .
3. Dans [70], Melleray caractérise les espaces métriques  $(X, d)$  tels que  $E(X)$  est séparable

Nous allons rappeler les conditions obtenues par Melleray sur  $(X, d)$  pour la séparabilité de  $E(X)$ .

**Définition 4.6.** Un espace métrique a la propriété de Heine-Borel si ses sous-ensembles bornés sont précompacts.

**Proposition 4.1.** (Proposition 1 dans [70]) Si  $X$  est polonais mais n'a pas la propriété de Heine-Borel, alors  $E(X)$  n'est pas séparable.

**Définition 4.7.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

1. Si  $\varepsilon > 0$ , on dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  est  $\varepsilon$ -bien-alignée si on a, pour chaque  $r \geq 0$ ,  $\sum_{i=0}^r d(u_i, u_{i+1}) \leq d(u_0, u_{r+1}) + \varepsilon$ .
2. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  est dite alignée si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N > 0$  tel que  $(u_0, u_N, u_{N+1}, \dots)$  est  $\varepsilon$ -bien-alignée.

**Théorème 4.2.** (Théorème 2 dans [70]) Soit  $X$  un espace polonais. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $E(X) = \overline{E(X, \omega)}$
2.  $E(X)$  est séparable.
3.  $\forall \delta > 0 \forall (x_n) \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, \exists i \leq N \ d(x_0, x_n) \geq d(x_0, x_i) + d(x_i, x_n) - \delta$
4. De toute suite d'éléments de  $X$  on peut extraire une sous-suite alignée.

Rappelons cette terminologie empruntée à [55].

- Définition 4.8.** 1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Un triplet ordonné  $\{x_1, x_2, x_3\}$  de points de  $X$  est  $\varepsilon$ -colinéaire si  $d(x_1, x_3) \geq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) - \varepsilon$ .
2. Un espace polonais  $X$  a la propriété de colinéarité si : Pour tout sous-ensemble infini  $A$  de  $X$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x_1, x_2, x_3 \in A$  (deux à deux distincts) tels que  $\{x_1, x_2, x_3\}$  est  $\varepsilon$ -colinéaire.

Modulo le théorème de Kalton ([55]) qui affirme que tout espace métrique a la propriété de colinéarité si, et seulement si, toute suite admet une sous-suite alignée, le résultat suivant apparait également dans [70].

**Corollaire 4.1.** (Corollaire 3 dans [70]) Un espace polonais  $X$  a la propriété de colinéarité si, et seulement si,  $E(X)$  est séparable.

Ce qui suit est un résultat de Katětov démontré dans [70].

**Proposition 4.2.** Soit  $X$  un espace métrique.  $E(X, \omega)$  est séparable si  $X$  est séparable. De plus, l'application de Kuratowski plonge isométriquement  $X$  dans  $E(X, \omega)$ , de telle façon que toute isométrie de  $X$  s'étend (uniquement) en une isométrie de  $E(X, \omega)$ , et le morphisme d'extension est continu.

En partant d'un espace métrique polonais  $X$  ; on construit par récurrence une suite  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'espaces métriques définie par  $X_0 = X$  et  $X_{i+1} = E(X_i, \omega)$  (Ceci a un sens, puisque l'application de Kuratowski permet d'identifier  $X_i$  à un sous-espace de  $X_{i+1}$ ).

Les résultats précédents permettent de voir que toute isométrie de  $X_i$  s'étend de manière unique en une isométrie de  $X_{i+1}$ , et que ceci définit un morphisme continu de  $Iso(X_i)$  dans  $Iso(X_{i+1})$ .

Par conséquent, si on pose  $X_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ , on a défini un morphisme continu  $\Psi$  de  $Iso(X)$  dans  $Iso(X_\infty)$ , qui a de plus la propriété suivante : Pour toute isométrie  $\varphi \in Iso(X)$ ,  $\Psi(\varphi)$  est un prolongement de  $\varphi$  (On dit encore comme dans [102] que  $X$  est  $g$ -plongé dans  $X_\infty$ ).

**Théorème 4.3.** (voir [83]) Si  $X$  est un espace métrique séparable, alors le complété de l'espace  $X_\infty$  est isométrique à l'espace universel d'Urysohn.

## 4.2.2 Le groupe des isométries

Si  $X$  est un espace métrique, alors la topologie de la convergence simple sur le groupe  $Iso(X)$  des isométries de  $X$  sur lui-même coïncide avec la topologie

compact-ouvert et ces deux topologies sont compatibles avec la structure de groupe de  $Iso(X)$  ([83]). Une base de voisinages de l'identité pour cette topologie est constitué des ensembles de la forme

$$V[F, \varepsilon] = \{g \in Iso(X) : \forall x \in F, d(g(x), x) < \varepsilon\},$$

où  $F \subseteq X$  est fini et  $\varepsilon > 0$ . Si  $X$  est séparable et donc vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, alors  $Iso(X)$  est aussi séparable. Si  $X$  est séparable et complet, alors  $Iso(X)$  est métrisable et complet. En effet, si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une partie dense de  $X$ , on vérifie que l'application

$$d(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} [d_X(f(x_i), g(x_i)) + d_X(f^{-1}(x_i), g^{-1}(x_i))]$$

est une métrique complète sur  $Iso(X)$  qui engendre la topologie de la convergence simple (Voir [83], Proposition 5.2.1)

**Proposition 4.3.** ([83]) *Soient  $X$  un espace métrique,  $g \in Iso(X)$  et  $f \in E(X, \omega)$  une fonction de Katětov contrôlée par un sous-ensemble fini  $A \subset X$ , alors l'application*

$$\begin{aligned} {}^g f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ({}^g f)(x) = f(g^{-1}x) \end{aligned}$$

*est une fonction de Katětov contrôlée par le sous-ensemble fini  $g(A)$ .*

**Remarque 4.4.** *D'après ce qui précède, l'application*

$$\begin{aligned} \tau : Iso(X) \times E(X, \omega) &\longrightarrow E(X, \omega) \\ (g, f) &\longmapsto g.f = {}^g f \end{aligned}$$

*définie une action par isométries de  $Iso(X)$  sur l'espace métrique  $E(X, \omega)$ . Cette action sera appelée action par translations à gauche.*

**Lemme 4.1.** [83] *L'action par translations à gauche du groupe  $Iso(X)$  dans  $E(X, \omega)$  est continue. De plus, l'application de Kuratowski*

$$\begin{aligned} \delta : X &\longrightarrow E(X, \omega) \\ x &\longmapsto \delta_x \end{aligned}$$

*est équivariante.*

**Remarque 4.5.** *Comme conséquence du lemme 4.1, le groupe  $Iso(X)$  opère continûment par isométries sur chaque extension de Katětov  $X_{i+1} = E(X_i, \omega)$ . Ceci nous permet d'avoir une action continue par isométries de  $G$  sur  $X_\infty$  qui se prolonge uniquement en une action continue de  $G$  sur le complété  $\mathbb{U}$  de  $X_\infty$ .*

**Théorème 4.4.** (*Uspenskij [101]*) *Le groupe topologique  $\text{Iso}(\mathbb{U})$  est universel pour la classe des groupes topologiques de poids dénombrables. Autrement dit, tout groupe topologique de poids dénombrable est isomorphe à un sous-groupe de  $\text{Iso}(\mathbb{U})$ .*

**Preuve.** Soit  $G$  un groupe topologique de poids dénombrable. Par le théorème de Teleman (Théorème 1.8), on peut choisir un espace métrique séparable  $X$  tel que  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $\text{Iso}(X)$ . D'après ce qui précède et la construction de Katětov de l'espace d'Urysohn  $\mathbb{U}$ , le groupe  $\text{Iso}(X)$  est isomorphe à un sous-groupe de  $\text{Iso}(\mathbb{U})$  ■

**Remarque 4.6.** *Le théorème d'Uspenskij précédent a été récemment raffiné par Melleray ([70]) comme suit :*

**Théorème 4.5.** (*Melleray [70]*) *Tout groupe polonais est isomorphe au sous-groupe de  $\text{Iso}(\mathbb{U})$  constitué par les isométries qui laissent fixe un certain fermé  $F \subseteq \mathbb{U}$ .*

**Remarque 4.7.** *Avec les deux solutions ( $\text{Iso}(\mathbb{U})$  et  $\text{Homeo}(I^{\aleph_0})$ ) fourni par Uspenskij du problème d'existence des groupes topologiques universels de poids dénombrables, la question naturelle qui apparaît dans [101] est celle de savoir si les deux solutions ci-dessus sont isomorphes en tant que groupes topologiques. Une réponse à cette question est apporté par le résultat suivant :*

**Théorème 4.6.** (*Pestov [85]*) *Le groupe  $\text{Iso}(\mathbb{U})$  muni de la topologie de la convergence simple est extrêmement moyennable.*

**Corollaire 4.2.** *Les groupes topologiques  $\text{Iso}(\mathbb{U})$  et  $\text{Homeo}(I^{\aleph_0})$  ne sont pas isomorphes.*

**Preuve.** Le groupe  $\text{Homeo}(I^{\aleph_0})$  possède une action continue sur  $I^{\aleph_0}$  sans point fixes car le cube de Hilbert  $I^{\aleph_0}$  est homogène ([60]) : Pour tous  $x, y \in I^{\aleph_0}$  distincts, il existe  $f \in \text{Homeo}(I^{\aleph_0})$  tel que  $f(x) = y$ . Ce groupe n'est donc pas extrêmement moyennable. ■

**Remarque 4.8.** *Le théorème d'Uspenskij présenté dans le paragraphe précédent sur l'universalité du groupe  $\text{Iso}(\mathbb{U})$  pour la classe des groupes topologiques de poids dénombrable suggère de conjecturer comme beaucoup de mathématiciens que le groupe  $\text{Iso}(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  où  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  est l'espace généralisé d'Urysohn  $\mathfrak{m}$ -homogène et  $\mathfrak{m}$ -universel pour un cardinal infini non dénombrable  $\mathfrak{m}$  est universel pour la classe des groupes topologiques de poids  $\mathfrak{m}$ .*

*Dans cette section, nous montrerons que cette conjecture est fausse.*

### 4.3 Construction de l'espace d'Urysohn-Katětov $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$

Soit  $X$  un espace topologique. Rappelons que le poids de  $X$  est le nombre cardinal  $\omega(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ est une base de } X\}$  et la densité de  $X$  est le nombre cardinal  $d(X) = \min\{|A| : A \text{ est une partie dense de } X\}$ . Où  $|A|$  désigne la cardinalité de  $A$ . Soit  $\mathfrak{m}$  un cardinal infini non dénombrable vérifiant

$$\sup \{\mathfrak{m}^n : n < \mathfrak{m}\} = \mathfrak{m}. \quad (4.1)$$

Nous allons présenter dans ce paragraphe en suivant [56] la construction de Katětov de l'espace universel d'Urysohn de poids  $\mathfrak{m}$ . La construction dans le cas particulier où  $\mathfrak{m} = \aleph_0$  a déjà été présentée au début de ce chapitre. Nous supposons dans la suite que  $\mathfrak{m}$  est un cardinal infini non dénombrable vérifiant la condition (4.1).

**Définition 4.9.** Soit  $\tau$  un cardinal infini. Un espace métrique  $(X, d)$  est dit :

1.  $\tau$ -homogène si pour tout  $A, B \subseteq X$  avec  $\text{card}(A) < \tau$  et  $\text{card}(B) < \tau$ , et pour toute isométrie  $f : A \rightarrow B$ , il existe une isométrie  $g : X \rightarrow X$  telle que  $g|_A = f$ .
2.  $\tau$ -universel si pour tout espace métrique  $Y$  tel que  $\text{card}(Y) \leq \tau$ , il existe un plongement isométrique  $i : Y \rightarrow X$ .
3. fortement  $\tau$ -universel si pour tout espace métrique  $Y$  tel que  $\omega(Y) \leq \tau$ , il existe un plongement isométrique  $i : Y \rightarrow X$ .
4.  $\tau$ -Urysohn universel (ou Urysohn universel de poids  $\tau$ ) si  $(X, d)$  est de poids  $\tau$ ,  $\tau$ -homogène et fortement  $\tau$ -universel.

Le théorème suivant est démontré dans [56]

**Théorème 4.7.** (Katětov [56]) Si  $\mathfrak{m}$  est un cardinal infini vérifiant (4.1), alors il existe à isométrie près une unique espace universel d'Urysohn de poids  $\mathfrak{m}$ .

Si  $\mathfrak{m}$  est un nombre cardinal, notons  $E_{\mathfrak{m}}(X) = \{f \in E(X) : |\text{support de } f| < \mathfrak{m}\}$  le sous-espace métrique de  $E(X)$  constitué des fonctions de Katětov donc le support a une cardinalité  $< \mathfrak{m}$  (ou de façon équivalente de densité  $< \mathfrak{m}$ ). La densité de  $E_{\mathfrak{m}}(X)$  ne dépasse pas  $\sup\{d(X)^n : n < \mathfrak{m}\}$ , où  $d(X)$  désigne la densité de  $X$ .

L'application de Kuratowski plonge isométriquement  $X$  dans  $E_1(X)$  et de façon canonique dans tout espace  $E_{\mathfrak{m}}(X)$  ([56]).

Partons d'un espace métrique  $X$  tel que  $\omega(X) = \mathfrak{m}$ . Considérons la chaîne des extensions de Katětov  $E_{\mathfrak{m}}^{\tau+1}(X) = E_{\mathfrak{m}}(E_{\mathfrak{m}}^{\tau}(X))$  où  $\tau < \mathfrak{m}$  et  $E_{\mathfrak{m}}^{\tau}(X) = \bigcup_{\lambda < \tau} E_{\mathfrak{m}}^{\lambda}(X)$

pour les cardinaux limites. Sous la condition (4.1), la densité de chaque extension

itérée de Katětov est bornée par  $\mathfrak{m}$ . Ainsi, en itérant cette construction  $\mathfrak{m}$  fois et en prenant le complété de la réunion

$$\bigcup_{n < \mathfrak{m}} E_{\mathfrak{m}}^n(X), \quad (4.2)$$

on obtient un plongement de  $X$  dans un espace métrique complet  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  de densité  $\mathfrak{m}$  ([56]).

- Remarque 4.9.**
1. *Si un cardinal non-dénombrable  $\mathfrak{m}$  vérifiant la condition (4.1) est tel que  $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{c}$  ( $\mathfrak{c}$  est le continu), alors la réunion (4.2) est automatiquement complète ([56]).*
  2. *Un espace métrique  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  avec les propriétés précédentes est unique (à isométrie près) et  $\mathfrak{m}$ -homogène ([56]).*
  3. *Par construction, l'espace métrique  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  est universel pour les espaces métriques de poids  $\leq \mathfrak{m}$ .*
  4. *Si  $\mathfrak{m} < \sup \{\mathfrak{m}^n : n < \mathfrak{m}\}$ , alors il n'existe pas d'espace métrique  $\mathfrak{m}$ -homogène et  $\mathfrak{m}$ -universel de poids  $\mathfrak{m}$ .*

L'espace métrique  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  vérifie en plus la propriété suivante :

**Lemme 4.2.** *Si  $Y$  est un sous-espace de  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  de cardinalité  $< \mathfrak{m}$  et  $f$  une fonction de Katětov sur  $Y$ , alors il existe un point  $z \in \mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  tel que  $f(y) = d(z, y)$  pour tout  $y \in Y$ .*

**Preuve.** Soit  $Y \subset \mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  un sous-espace de cardinalité  $< \mathfrak{m}$  de  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  et soit  $f \in E(Y)$ . L'espace  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  étant universel de poids  $\mathfrak{m}$ , l'espace métrique  $Y_f = Y \cup \{f\}$  se plonge isométriquement dans  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$ . Donc il existe une copie isométrique  $Y'_f = Y' \cup \{z\}$  de  $Y_f$  contenue dans  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$ . Par définition de  $Y_f$ , il existe une isométrie  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  telle que  $d(z, \varphi(y)) = f(y)$  pour tout  $y \in Y$ . L'espace  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  étant  $\mathfrak{m}$ -homogène, l'isométrie  $\varphi$  se prolonge en une isométrie  $\tilde{\varphi} : V \rightarrow \mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$ . Soit  $y \in Y$ , on a :  
 $d(\tilde{\varphi}^{-1}(z), y) = d(z, \tilde{\varphi}(y)) = d(z, \varphi(y)) = f(y)$ . ■

## 4.4 Voisinages de l'identité des Sous-groupes de $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$

Le groupe  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  de toutes les isométries de  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  sur lui-même est muni de la topologie de la convergence simple sur  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$ . Une base de voisinage de l'élément neutre est constitué des ensembles de la forme

$$V[x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon] = \{g \in Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}) : d(x_i, gx_i) < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\},$$

où  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{U}_m$  et  $\varepsilon > 0$ .  
Le lemme suivant est fondamental pour la suite.

**Lemme 4.3.** *Soit  $m$  un cardinal infini vérifiant l'égalité (4.1), et soit  $G$  un sous-groupe de  $\text{Iso}(\mathbb{U}_m)$  de densité  $< m$ . Les ensembles*

$$V[x; \varepsilon] \cap G, \quad x \in \mathbb{U}_m, \quad \varepsilon > 0$$

*forment une base de voisinage de l'identité pour la topologie de  $G$ .*

**Preuve.** Sans nuire à la généralité, nous pouvons remplacer  $G$  par un sous-groupe dense de cardinalité  $< m$ .

Soit  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{U}_m$  et  $\varepsilon > 0$  arbitraire.

Nous cherchons  $y \in \mathbb{U}_m$  et  $\gamma > 0$  tel que

$$V[y; \gamma] \cap G \subseteq V[x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon].$$

Notons  $D$  le diamètre de  $X$ . Choisissons  $\gamma > 0$  tel que  $\gamma \leq \varepsilon$  et les boules centrées en  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  et de rayons  $n\gamma$  sont deux à deux disjointes. La fonction

$$f(x_i) = D + i\gamma$$

est de Katětov. En effet, Si  $x_i, x_j \in X$ , alors on a d'une part

$$|f(x_i) - f(x_j)| = |i - j|\gamma \leq (n - 1)\gamma < 2n\gamma < d(x_i, x_j),$$

car

$$B_{n\gamma}(x_i) \cap B_{n\gamma}(x_j) = \emptyset \implies d(x_j, x_i) > 2n\gamma,$$

et d'autre part

$$f(x_i) + f(x_j) = 2D + (i + j)\gamma > D \geq d(x_i, x_j).$$

Notons encore par  $f$  son extension de Katětov  $k_X(f)$  sur  $\mathbb{U}_m$ .

Soit  $i = 1, 2, \dots, n$ . Supposons  $x \in \mathbb{U}_m$  et pour tout  $j = 1, 2, \dots, i$ ,  $d(x_j, x) \geq (i - j)\gamma$ .

Alors pour tout  $j = 1, 2, \dots, n$ , on a :

$$d(x, x_j) + f(x_j) \geq (i - j)\gamma + D + j\gamma.$$

Donc

$$d(x, x_j) + f(x_j) \geq D + i\gamma.$$

Ainsi,  $f(x) \geq D + i\gamma$ . Donc  $f$  vérifie la propriété suivante :



$$\forall x \in \mathbb{U}_m, (f(x) < D + i\gamma) \implies x \in \bigcup_{j=1}^{i-1} B_{(i-j)\gamma}(x_j) \quad (4.3)$$

Notons  $A$  la réunion de toutes les  $G$ -orbites des points  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Par le lemme 4.2, il existe  $y \in \mathbb{U}_m$  tel que  $f(a) = d(y, a)$  pour tout  $a \in A$ . Montrons que

$$V[y; \gamma] \subseteq V[x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon].$$

Soit  $g \in V[y; \gamma]$  i.e  $d(y, gy) < \gamma$ . Pour tout  $x \in A$ , on a :

$$|f(x) - f(gx)| = |d(y, x) - d(y, gx)| = |d(gy, gx) - d(y, gx)| \leq d(y, gy) < \gamma$$

En particulier, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , nous obtenons :

$$f(gx_i) < D + (i + 1)\gamma.$$

Par conséquent, nous obtenons via (4.3)

$$gx_i \in \bigcup_{j=1}^i B_{(i-j+1)\gamma}(x_j).$$

Ainsi, pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , il existe  $j = \phi(i) \in \{1, 2, \dots, i\}$  tel que

$$gx_i \in B_{(i-j+1)\gamma}(x_j).$$

Montrons que  $\phi$  est injective.

Soit  $i \neq k$ , alors il existe d'une part  $j = \phi(i) \in \{1, 2, \dots, i\}$  tel que

$$gx_i \in B_{(i-j+1)\gamma}(x_j).$$

D'autre part il existe  $l = \phi(k) \in \{1, 2, \dots, k\}$  tel que

$$gx_k \in B_{(k-l+1)\gamma}(x_l).$$

Supposons  $j = l$ , alors on a :

$$d(x_i, x_k) = d(gx_i, gx_k) < d(gx_i, x_j) + d(gx_k, x_j) < 2(i - j + 1)\gamma.$$

Ainsi,  $d(x_i, x_k) < 2(i - j + 1)\gamma$ . Donc  $B_{(i-j+1)\gamma}(x_i) \cap B_{(i-j+1)\gamma}(x_k) \neq \emptyset$ . Ce qui est absurde par le choix de  $\gamma$ . Ainsi  $\phi$  est une application injective de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans lui-même qui vérifie  $\phi(i) \leq i$ . Donc  $\phi$  est l'application identique. Ceci implique  $gx_i \in B_\varepsilon(x_i)$  pour tout  $i$  comme souhaité.

■

## 4.5 Groupes SIN et Groupes FSIN

**Définition 4.10.** Soit  $G$  un groupe topologique. Il existe sur  $G$  deux structures uniformes bien connues : la structure uniforme droite que nous noterons  $\mathcal{U}_R(G)$  et la structure uniforme gauche que nous noterons  $\mathcal{U}_L(G)$ .

1. Soit  $V$  un voisinage de  $e$  dans  $G$ . Posons  $V_d = \{(x, y) : xy^{-1} \in V\}$ .  
La famille des ensembles  $V_d$  lorsque  $V$  parcourt une base de voisinages de  $e$  forme une base d'entourages pour la structure uniforme droite  $\mathcal{U}_R(G)$  sur  $G$ .
2. Soit  $V$  un voisinage de  $e$  dans  $G$ . Posons  $V_g = \{(x, y) : x^{-1}y \in V\}$ .  
La famille des ensembles  $V_g$  lorsque  $V$  parcourt une base de voisinages de  $e$  forme une base d'entourages pour la structure uniforme gauche  $\mathcal{U}_L(G)$  sur  $G$ .

**Théorème 4.8.** Soit  $G$  un groupe topologique. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Les structures uniformes  $\mathcal{U}_R(G)$  et  $\mathcal{U}_L(G)$  coïncident.
2. Pour tout voisinage  $U$  de  $e$ , il existe un voisinage  $V$  de  $e$  tel que  $x^{-1}Vx \subseteq U$  pour tout  $x \in G$ .
3. L'inversion sur  $G$  est uniformément continue pour la paire  $(\mathcal{U}_R(G), \mathcal{U}_R(G))$  ou pour la paire  $(\mathcal{U}_L(G), \mathcal{U}_L(G))$ .

**Preuve.**

- 1)  $\implies$  2) Supposons que les structures uniformes  $\mathcal{U}_R(G)$  et  $\mathcal{U}_L(G)$  coïncident. Soit  $U$  un voisinage de l'identité dans  $G$ . Alors il existe un voisinage symétrique  $V$  de l'identité dans  $G$  tel que  $V_d \subseteq U_g$ . Ceci implique que si  $xy^{-1} \in V$  alors  $x^{-1}y \in U$ . Ainsi, si  $y \in Vx$ , alors  $y \in xU$ . Donc pour tout  $x \in G$ , on a :  $Vx \subseteq xU$ . Ainsi  $x^{-1}Vx \subseteq U$ .
- 2)  $\implies$  3) Soit  $A \in \mathcal{U}_R(G)$ . Alors, il existe un voisinage de l'identité  $U$  tel que  $U_d \subseteq A$ . Puisque  $U^{-1}$  est également un voisinage de l'identité, alors par 2, il existe un voisinage  $V$  de l'identité tel que  $x^{-1}Vx \subseteq U^{-1}$  pour tout  $x \in G$ . Ainsi, si  $xy^{-1} \in V$  alors  $x^{-1}(xy^{-1})x = y^{-1}x \in U^{-1}$ . Donc  $(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in U$  et ainsi  $(x^{-1}, y^{-1}) \in U_d$ . Donc  $V_d \subseteq \{(x, y) \in X \times X : (x^{-1}, y^{-1}) \in U_d\} \subseteq A$ . Ainsi, l'inversion est uniformément continue pour la paire  $(\mathcal{U}_R(G), \mathcal{U}_R(G))$ .
- 3)  $\implies$  1) Soit  $A \in \mathcal{U}_L(G)$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de l'identité dans  $G$  tel que  $V_g \subseteq A$ . Notons que  $(x, y) \in V_g$  si et seulement si  $(x^{-1}, y^{-1}) \in V_d$ . Donc  $V_g = \{(x, y) : (x^{-1}, y^{-1}) \in V_d\}$ . Par 3 ; il existe un voisinage de l'identité  $U$  tel que  $U_d \subseteq V_g$ . Ainsi  $A \in \mathcal{U}_R(G)$ . De la même façon, si  $A \in \mathcal{U}_R(G)$ , alors il existe un voisinage de l'identité  $U$  tel que  $U_g \subseteq A$ .

■

**Définition 4.11.** Un groupe topologique  $G$  est dit *SIN* (Small Invariant Neighbourhood) s'il vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème 4.8.

**Remarque 4.10.** Si  $G$  est un groupe *SIN*, alors pour tout voisinage  $U$  de l'élément neutre, il existe un voisinage  $V$  de l'élément neutre tel que  $x^{-1}Vx \subseteq U$  pour tout  $x \in G$ . Posons  $W = \bigcup_{x \in G} x^{-1}Vx$ . Alors  $W$  est un voisinage de l'identité dans  $G$  contenu dans  $U$ . De plus, pour tout  $g \in G$ , on a :

$$g^{-1}Wg = g^{-1}\left(\bigcup_{x \in G} x^{-1}Vx\right)g = \bigcup_{x \in G} (xg)^{-1}Vxg = W.$$

Donc  $W$  est invariant.

Ainsi nous avons le théorème suivant qui justifie la terminologie *SIN* (Small Invariant Neighbourhoods)

**Théorème 4.9.** Un groupe topologique  $G$  est *SIN* si et seulement s'il possède une base de voisinages de l'identité constitué des voisinages invariants.

**Exemple 4.1.** 1. Tout groupe précompact est *SIN*.

En effet, soit  $V$  un voisinage symétrique de l'élément neutre dans  $G$ . Soit  $U$  un voisinage symétrique de l'identité dans  $G$  tel que  $U^3 \subseteq V$ . Puisque  $G$  est précompact, il existe  $A \subseteq G$  fini tel que  $G = AU$ . Notons que  $W = \bigcap_{a \in A} a^{-1}Ua$  est un voisinage de l'identité dans  $G$  et  $aWa^{-1} \subseteq U$ . Soit  $g \in G$ , alors il existe  $u \in U$  tel que  $g = au$ . Nous avons :

$$g^{-1}Wg = (au)^{-1}(aWa^{-1})(au) = u^{-1}a^{-1}(aWa^{-1})au \subseteq u^{-1}Uu \subseteq U^3 \subseteq V.$$

2. Tout groupe abélien est *SIN*. En effet, tout sous-ensemble d'un groupe abélien est invariant.
3. Le groupe des permutations d'un ensemble infini n'est pas *SIN*.

En général, on a la proposition suivante :

**Proposition 4.4.** Soit  $X$  un ensemble non vide. Le groupe  $S_X$  de toutes les bijections de  $X$  sur lui-même muni de la topologie de la convergence simple sur  $X$  où  $X$  est muni de la topologie discrète est *SIN* si et seulement si  $|X| < \infty$ .

Rappelons la description de la topologie de  $S_X$ . Pour tout sous-ensemble fini  $M = \{m_1, \dots, m_n\}$  de  $X$ , posons  $St_M = \{g \in S_X : \forall j = 1, \dots, n, g(m_j) = m_j\}$ . La famille des ensembles de la forme  $St_M$  où  $M$  est un sous-ensemble fini de  $X$  forme une base de voisinages de l'identité pour la topologie de la convergence simple sur  $S_X$ .

**Lemme 4.4.** *Le groupe  $S_X$  est non-discret si et seulement si  $X$  est infini.*

**Preuve.** Soit  $\iota$  l'application identique de  $X$  sur lui-même i.e l'identité de  $S_X$ . Supposons que  $|X| < \infty$ , alors le sous-groupe  $St_X$  est un élément de la base. Comme  $St_X = \{\iota\}$ , alors  $\{\iota\}$  est un ouvert. Ainsi,  $S_X$  est discret. Réciproquement, si  $X$  est infini, alors il n'existe pas de sous-ensemble fini  $M \subset X$  tel que  $St_M = \{\iota\}$ . Ainsi  $\{\iota\}$  n'est pas ouvert. Donc  $S_X$  est non-discret. ■

**Preuve. (Proposition 4.4)**

Supposons  $|X| < \infty$ . Par le lemme 4.4,  $St_X = \{\iota\}$  est un ouvert. Il s'en suit que pour tout sous-ensemble fini  $M$  de  $X$ , on a :  $g^{-1}St_Xg \subseteq St_M$  pour tout  $g \in S_X$ . Donc  $S_X$  est SIN.

Réciproquement, soit  $M$  un sous-ensemble fini de  $X$ . Par hypothèse, il existe un sous-ensemble fini  $N$  de  $X$  tel que  $g^{-1}St_Ng \subseteq St_M$  pour tout  $g \in S_X$ . Nous allons montrer que  $M \cup N = X$ . Supposons le contraire i.e  $X \setminus (M \cup N) \neq \emptyset$ . Soit  $m$  un point fixé de  $M$  et soit  $g \in S_X$  tel que  $g(m) \in X \setminus (M \cup N)$ . Maintenant, soit  $f \in St_N$  tel que  $f(g(m)) \neq g(m)$ . Alors  $g^{-1}fg(m) \neq m$ . Ainsi,  $g^{-1}St_Ng \not\subseteq St_M$ . Ce qui est une contradiction. Donc  $M \cup N = X$  et  $X$  est fini. ■

**Définition 4.12.** *Un groupe topologique  $G$  est FSIN si l'ensemble des fonctions sur  $G$  à valeurs réelles uniformément continues à gauche coïncide avec l'ensemble des fonctions à valeurs réelles sur  $G$  uniformément continue à droite.*

**Remarque 4.11.** *Il est clair que tout groupe topologique SIN est FSIN. La question qui consiste à étudier la réciproque de cette assertion est appelée problème de Itzkowitz qui fut le premier à s'intéresser à cette question dans [52]. Cette question a été répondu par l'affirmative entre autre pour la classe des groupes localement compacts ([51]), celle des groupes métrisables ([89]) et la classe des groupes localement connexes ([68]). Cependant, cette question reste ouverte dans le cas général. Les développements récents sur cette question, peuvent être consulter dans ([18]).*

Le théorème suivant est une caractérisation très utile des groupes FSIN que nous utiliserons dans la suite.

**Théorème 4.10.** *(Protasov et Saryev [90]) Soit  $G$  un groupe topologique et soit  $\mathcal{U}$  une base de voisinages symétriques de  $e$ . Les propositions sont équivalentes :*

1.  $G$  est FSIN
2. Pour tout  $A \subset G$  et pour tout  $U \in \mathcal{U}$ , il existe  $V \in \mathcal{U}$  tel que  $VA \subset AU$ .

Avant d'énoncer un important corollaire de ce théorème, introduisons une terminologie empruntée de [68] :

**Définition 4.13.** Un sous ensemble  $A$  d'un groupe topologique  $G$  est dit neutre à gauche si pour tout voisinage  $V$  de l'identité dans  $G$ , il existe un voisinage  $U$  de l'identité tel que  $UA \subseteq AV$ . De façon similaire, on définit un sous-ensemble neutre à droite. Un sous-ensemble à la fois neutre à gauche et à droite est dit neutre.

**Exemple 4.2.** 1. Tout sous-espace compact  $A$  d'un groupe topologique  $G$  est neutre.

En effet, soit  $V$  un voisinage de l'identité de  $G$ . Alors il existe un voisinage  $W$  de l'identité tel que  $W^2 \subseteq V$ . Les ensembles  $\{aW : a \in A\}$  et  $\{Wa : a \in A\}$  sont tous les recouvrement ouverts de  $A$ . Puisque  $A$  est compact, il existe un nombre fini de points  $a_1, \dots, a_n \in A$  et  $b_1, \dots, b_m \in A$  tel que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n a_i W$  et  $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m W b_j$ . Posons  $U = \bigcap_{i=1}^n a_i W a_i^{-1}$  et  $U' = \bigcap_{j=1}^m b_j^{-1} W b_j$ . Clairement,  $U$  et  $U'$  sont des voisinages de l'identité. De plus,  $U a_i \subseteq a_i W$  et  $b_j U' \subseteq W b_j$ , pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$  respectivement. Maintenant

$$UA \subseteq U \left( \bigcup_{i=1}^n a_i W \right) = \bigcup_{i=1}^n (U a_i) W \subseteq \bigcup_{i=1}^n a_i W^2 \subseteq \bigcup_{i=1}^n a_i V \subseteq \bigcup_{a \in A} a V = AV$$

et

$$AU' \subseteq \left( \bigcup_{j=1}^m W b_j \right) U' = \bigcup_{j=1}^m W (b_j U') \subseteq \bigcup_{j=1}^m W^2 b_j \subseteq \bigcup_{j=1}^m V b_j \subseteq \bigcup_{a \in A} V a = VA.$$

Ce qui démontre que  $A$  est neutre.

2. Un sous-groupe normal  $H$  d'un groupe topologique  $G$  est neutre. En effet, soit  $V$  un voisinage de l'élément neutre dans  $G$ . Puisque  $H$  est normal, nous avons  $vH = Hv$  pour tout  $v \in V$ . Puisque  $VH = \bigcup_{v \in V} vH$  et  $HV = \bigcup_{v \in V} Hv$ , il s'en suit que  $VH = HV$  et ainsi,  $H$  est neutre.

**Définition 4.14.** Un sous ensemble  $A$  d'un groupe topologique  $G$  est dit uniformément discret à gauche s'il est uniformément discret par rapport à la structure uniforme gauche. En d'autres termes, s'il existe un voisinage  $V$  de l'identité tel que  $(aV) \cap (bV) = \emptyset$  dès que  $a, b \in A$  et  $a \neq b$ .

**Corollaire 4.3.** Un groupe topologique  $G$  est FSIN si et seulement si pour tout sous-ensemble uniformément discret à gauche  $A \subseteq G$  et pour tout voisinage de l'identité  $V$ , il existe un voisinage  $U$  de l'identité tel que  $UA \subseteq AV$ .

**Preuve.** Il suffit d'établir la suffisance. Nous allons le faire en utilisant le théorème de Protasov-Saryev (théorème 4.10). Soit  $A$  un sous-ensemble arbitraire de  $G$  et soit

$V$  un voisinage de l'identité dans  $G$ . Choisissons un voisinage symétrique de l'identité  $W$  tel que  $W^4 \subseteq V$ . Soit  $B$  un sous-ensemble maximal de  $AW$  vérifiant la propriété : pour tout  $a, b \in B$ ,  $a \neq b$ , les ensembles  $aW$  et  $bW$  sont disjoints. L'existence de  $B$  est garantie par une application convenable du lemme de Zorn. Alors, il est clair que  $A \subseteq BW^2$ . Puisque  $B$  est uniformément discret à gauche, il existe un voisinage  $U$  de l'identité avec la propriété que  $UB \subseteq BW$ . Nous avons :

$$UA \subseteq UBW^2 \subseteq BW^3 \subseteq AW^4 \subseteq AV.$$

■

**Remarque 4.12.** *Si  $G$  est un groupe topologique FSIN et dense dans un groupe  $H$ , alors  $H$  est FSIN.*

*En effet, soit  $f$  une fonction uniformément continue à gauche sur  $H$ . Alors la restriction de  $f$  à  $G$  est uniformément continue à gauche. Puisque  $G$  est FSIN,  $f$  est uniformément continue à droite. Ainsi  $f$  est uniformément continue à droite sur  $H$  grâce à l'observation générale suivante :*

**Proposition 4.5.** *([?]) Soit  $f$  une fonction continue sur un espace uniforme  $X$  et  $Y$  un sous-espace dense de  $X$ . Si la restriction de  $f$  à  $Y$  est uniformément continue ( $Y$  muni de l'uniformité induite), alors  $f$  est uniformément continue sur  $X$ .*

Pour terminer cette section rappelons les résultats suivants qui donnent des réponses positives au problème d'Itzkowitz pour la classe des groupes métrisables et celles des groupes localement connexe.

**Théorème 4.11.** *(Protasov [89]) Tout groupe métrisable FSIN est SIN.*

**Théorème 4.12.** *(M. Megrelishvili, P. Nickolas et V. Pestov [68]) Un groupe topologique  $G$  localement connexe est SIN si et seulement s'il est FSIN.*

## 4.6 Sous-groupes FSIN du groupe $Iso(\mathbb{U}_m)$

Commençons par rappeler la notion de propriété (OB) introduite dans [92].

**Définition 4.15.** 1. *Une pseudo-métrique sur un ensemble non vide  $X$  est une fonction  $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tous  $x, y, z \in X$ , on a :*

- (a)  $\rho(x, x) = 0$
- (b)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- (c)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

2. Une pseudo-métrie  $d$  sur un groupe topologique  $G$  est dite invariante à gauche si  $d(ax, ay) = d(x, y)$  pour tout  $a \in G$

**Définition 4.16.** Un groupe topologique  $G$  possède la propriété (OB) si toute pseudo-métrie continue invariante à gauche sur  $G$  est borné.

L'ensemble des groupes possédant la propriété (OB) comprend :

1. Le groupe symétrique infini  $S_\infty$  muni de sa topologie polonaise ([12]).
2. Le groupe  $Iso(\mathbb{U})$  des isométries de l'espace polonais universel d'Urysohn  $\mathbb{U}$  sur lui-même muni de la topologie de la convergence simple ([92]).
3. Le groupe  $Homeo([0, 1]^{\aleph_0})$  des homéomorphismes du cube de Hilbert sur lui-même muni de la topologie de la convergence uniforme ([92]).

Nous pouvons à présent établir le principal résultat de cette section :

**Théorème 4.13.** Soit  $\mathfrak{m}$  un cardinal infini non dénombrable vérifiant la condition (4.1). Si  $G$  est un sous-groupe topologique de  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  de densité  $< \mathfrak{m}$  et possédant la propriété (OB), alors  $G$  est FSIN.

**Preuve.** En vertu de la Remarque 4.12, nous pouvons supposons sans perte de généralité que la cardinalité de  $G$  ne dépasse pas  $\mathfrak{m}$ . Soit  $A \subseteq G$  un sous-ensemble uniformément discret à gauche et soit  $V$  un voisinage symétrique de  $e$ . Nous allons chercher un voisinage  $W$  de  $e$  tel que  $WA \subseteq AV$ .

Comme  $A$  est uniformément discret à gauche, on a :

$$aV \cap bV = \emptyset \tag{4.4}$$

dès que  $a, b \in A$ ,  $a \neq b$ .

En utilisant le Lemma 4.3, choisissons  $x \in \mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  et  $\varepsilon > 0$  tel que

$$G \cap V[x; 2\varepsilon] \subseteq V.$$

Soit  $(Ax)_\varepsilon$  le  $\varepsilon$ -voisinage ouvert de  $Ax$  dans  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  :

$$(Ax)_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(ax).$$

Si  $a \neq b$ , alors les  $\varepsilon$ -boules ouvertes centrées en  $ax$  et  $bx$  de  $Ax$  sont disjointes.

En effet, en supposant  $B_\varepsilon(ax) \cap B_\varepsilon(bx) \neq \emptyset$ , il existe  $u \in \mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  tel que  $d(u, ax) < \varepsilon$  et  $d(u, bx) < \varepsilon$ . Par application de l'inégalité triangulaire, on a :

$$d(a^{-1}bx, x) = d(bx, ax) < 2\varepsilon.$$

Ainsi  $a^{-1}b \in G \cap V[x; 2\varepsilon] \subseteq V$  et  $b \in aV$ . Ce qui implique  $a = b$  en vertu de (4.4). Soit  $D$  un nombre réel positif à la fois plus grand que le diamètre de  $Ax$  et  $4\varepsilon$ . Notons  $F$  le complémentaire de  $(Ax)_\varepsilon$  dans  $\mathbb{U}_m$ . Considérons la fonction 1-lipschitzienne  $f$  à valeurs réelles définie sur  $\mathbb{U}_m$  par :

$$f(y) = D - d(y, F).$$

Montrons que  $f(y) > D - 2\varepsilon$  pour tout  $y \in \mathbb{U}_m$ .

Si  $y \in F$  alors  $f(y) = D > D - 2\varepsilon$ .

Si  $y \notin F$ , alors  $d(y, F) \leq d(y, ax) + d(ax, F)$  avec  $a \in A$ . Donc  $d(y, F) \leq 2\varepsilon$ . Ainsi,  $f(y) \geq D - 2\varepsilon$  pour tout  $y \in \mathbb{U}_m$  et on a :  $f(x) + f(y) \geq 2D - 4\varepsilon > D$  car  $D > 4\varepsilon$ . Donc  $f(x) + f(y) > D > d(x, y)$ . On conclut que  $f$  est de Katětov. Par le Lemme 4.2 et le fait que le  $G$ -orbite de  $x$  a une cardinalité  $< m$ , il existe  $z \in \mathbb{U}_m$  tel que

$$\forall g \in G, \quad f(gx) = d(gx, z).$$

Posons

$$W = V[z; \varepsilon] \cap G.$$

Soient  $w \in W$  et  $a \in A$ . Alors  $w \in V[z; \varepsilon]$  et  $d(wz, z) < \varepsilon$ . On a :

$$f(wax) = d(wax, z) \leq d(wax, wz) + d(wz, z) \leq d(ax, z) + d(wz, z) = f(ax) + d(wz, z).$$

Donc  $f(wax) - f(ax) < \varepsilon$ . Ainsi  $f(wax) \neq D$  car  $f(ax) = D - \varepsilon$ . Ce qui entraîne

$$wax \in \{s \in \mathbb{U}_m : f(s) < D\}.$$

Si  $t \notin (Ax)_\varepsilon$ , alors  $t \in F$  et  $d(t, F) = 0$ . Ainsi  $f(t) = D$ . Or pour tout  $x \in \mathbb{U}_m$ , on a :  $f(x) \leq D$ . Donc

$$\{x \in \mathbb{U}_m : f(x) < D\} = (Ax)_\varepsilon.$$

Comme  $wax \in (Ax)_\varepsilon$ , il existe  $b \in A$  tel que  $wax \in B_\varepsilon(bx)$  car  $(Ax)_\varepsilon = \bigcup_{b \in A} B_\varepsilon(bx)$ .

Comme  $d(wax, bx) < \varepsilon$ , on a :  $d(b^{-1}wax, x) < \varepsilon$ , i.e  $b^{-1}wa \in V[x, \varepsilon]$ . Donc

$$b^{-1}wa \in G \cap V[x, \varepsilon] \subseteq G \cap V[x, \varepsilon] \subseteq V.$$

Ainsi  $wa \in AV$  comme souhaité. ■

En utilisant le théorème 4.11 et le théorème 4.12, nous obtenons :

**Corollaire 4.4.** *Soit  $m$  un cardinal infini non dénombrable vérifiant la condition (4.1). Si  $G$  est un sous-groupe de  $\text{Iso}(\mathbb{U}_m)$  de densité  $< m$ , possédant la propriété (OB) et métrisable ou localement connexe, alors  $G$  est SIN.*



Voici à présent une liste de groupes topologiques qui ne se plonge pas dans le groupe  $Iso(\mathbb{U}_m)$  pour  $m$  non-dénombrable vérifiant (4.1). Ceci permettra de conclure que ce groupe n'est pas universel :

1. Notons  $\mathbb{U}_1$  l'espace métrique d'Urysohn de diamètre 1. Le groupe  $Iso(\mathbb{U}_1)$  est à la fois métrisable de localement connexe (est en effet homéomorphe à  $\ell^2([72])$ ), possède la propriété (OB) ([92], Théorème 1.5), mais n'est pas SIN (Ceci provient du fait que ce groupe est universel pour les groupes polonais ([101],[102])). Ainsi, le groupe  $Iso(\mathbb{U}_1)$  ne se plonge pas dans le groupe  $Iso(\mathbb{U}_m)$ .
2. Le groupe symétrique infini  $S_\infty$  est polonais non-SIN et possède la propriété (OB).
3. Le groupe  $Homeo([0, 1]^{\aleph_0})$  des homéomorphismes du cube de Hilbert sur lui-même muni de la topologie de la convergence compact est un groupe polonais non-SIN possédant la propriété (OB).
4. Le groupe  $U(\ell^2)$  muni de la topologie forte possède la propriété (OB) ([6]).

En particulier, si  $m$  est un cardinal infini non dénombrable vérifiant la condition (4.1), alors le groupe  $Iso(\mathbb{U}_m)$  ne contient pas une copie du groupe topologique  $Iso(\mathbb{U})$ .

**Remarque 4.13.** *D'après ce qui précède, le groupe  $Iso(\mathbb{U}_m)$  n'est pas universel pour la classe des groupes topologiques de poids non dénombrable  $m$ . Néanmoins, on a les résultats suivant :*

**Théorème 4.14.** *Soit  $m$  un cardinal infini non dénombrable vérifiant la condition (4.1). Tout groupe métrisable SIN de poids  $\leq m$  se plonge dans  $Iso(\mathbb{U}_m)$ .*

La preuve de ce théorème utilise la même technique utilisée par Uspenkiĭ ([101],[102]) pour établir l'universalité du groupe  $Iso(\mathbb{U})$  pour la classe des groupes topologiques vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité. Cette technique a été présentée en début de chapitre pour la démonstration du Théorème 4.4. La continuité de l'action initiale est assurée par l'observation suivante :

**Lemme 4.5.** *Soit  $G$  un groupe opérant par isométries sur un espace métrique  $X$  et soit  $V$  un voisinage de l'identité dans  $G$  et  $\varepsilon > 0$ . Supposons que la propriété suivante est satisfaite :*

$$(\star) : \quad \forall x \in X \text{ et } v \in V, \text{ on a : } d(x, vx) \leq \varepsilon.$$

*Alors l'action canonique de  $G$  sur  $E(X)$  vérifie la propriété  $(\star)$ .*

**Preuve.** Soit  $f$  une fonction 1-lipschitzienne sur  $X$ .

Pour tout  $g \in V$  et  $x \in X$ , on a :

$$\begin{aligned} d_X^E(gf, f) &= \sup_{x \in X} |f(g^{-1}x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} d(g^{-1}x, x) \quad \blacksquare \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

**Preuve. (du théorème 4.14)** Soit  $G$  un groupe SIN métrisable de poids  $\leq \mathfrak{m}$ .

Fixons une métrique bi-invariante  $d$  sur  $G$ . L'action par multiplication à gauche de  $G$  sur lui-même vérifie la propriété  $(\star)$ .

En effet, soit  $\varepsilon > 0$ . Considérons  $V = B_\varepsilon(e)$ . On peut supposer sans nuire à la généralité comme  $G$  est SIN que  $V$  est invariant par conjugaisons. Soit  $g \in G$  et  $v \in V$ , on a :  $d(g, vg) = d(e, g^{-1}vg) < \varepsilon$ . Par le lemme 4.5, l'action canonique de  $G$  sur  $E(G)$  possède également la propriété  $(\star)$ . De proche en proche, l'action itérée de  $G$  sur  $\mathbb{U}_\mathfrak{m} = \bigcup_{n < \mathfrak{m}} E_\mathfrak{m}^{(n)}(G)$  possède la propriété  $(\star)$  i.e est continue. Il s'en suit que cette action détermine un plongement de  $G$  dans  $\text{Iso}(\mathbb{U}_\mathfrak{m})$ .  $\blacksquare$

**Remarque 4.14.** 1. Le groupe  $U(\ell^2)$  muni de la topologie d'opérateurs uniformes est métrisable, SIN et poids le continu  $\mathfrak{c}$  ([91]). Ainsi, ce groupe se plonge dans le groupe  $\text{Iso}(\mathbb{U}_\mathfrak{m})$  pour  $\mathfrak{m}$  non-dénombrable par le théorème 4.14.  
2. Nous ne savons pas si tous les groupes SIN de poids  $\leq \mathfrak{m}$  se plongent dans  $\text{Iso}(\mathbb{U}_\mathfrak{m})$ . Au même temps, tous les sous-groupes de  $\text{Iso}(\mathbb{U}_\mathfrak{m})$  ne sont pas SIN comme le montre l'observation suivante :

**Définition 4.17.** Soit  $\mathfrak{m}$  un cardinal infini non dénombrable vérifiant la condition (4.1). Un groupe topologique  $G$  est un  $P_\mathfrak{m}$ -groupe si toute intersection d'une famille d'ouverts de  $G$  de cardinalité  $< \mathfrak{m}$  est un ouvert.

Rappelons qu'un sous-ensemble  $Q$  d'un ensemble ordonné  $(P, \preceq)$  est dit cofinal si pour tout  $x \in P$ , il existe  $y \in Q$  tel que  $x \preceq y$  et le plus petit cardinal d'un sous-ensemble cofinal est appelé cofinalité de  $(P, \preceq)$ .

Soit  $\mathfrak{m}$  un cardinal infini non dénombrable vérifiant (4.1). D'après [45], il existe un filtre ordonné  $\mathbb{K}$  de cofinalité  $\mathfrak{m}$ .

Le groupe linéaire  $GL(\mathbb{K}, n)$  muni de sa topologie naturelle induite de celle de  $\mathbb{K}^{n^2}$  est un  $P_\mathfrak{m}$ -groupe ([82]). Ce groupe est par ailleurs non SIN ([82]).

Notons  $(\mathcal{C})$  la classe des  $P_\mathfrak{m}$ -groupes, on a le résultat :

**Théorème 4.15.** Soit  $\mathfrak{m}$  un cardinal infini non dénombrable vérifiant (4.1). Si  $G \in (\mathcal{C})$  est de poids  $\mathfrak{m}$ , alors  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $\text{Iso}(\mathbb{U}_\mathfrak{m})$ .

La démonstration de cet important théorème utilise la même technique utilisée par

Uspenkij dans [101] pour établir l'universalité du groupe  $Iso(\mathbb{U})$ . La continuité de l'action initiale est garantie par le lemme suivant :

**Lemme 4.6.** *Soit  $G \in (\mathcal{C})$  un groupe topologique de poids  $\mathfrak{m}$ . Si  $G$  opère continûment par isométries sur un espace métrique  $X$ , alors l'extension canonique de cette action sur  $E_{\mathfrak{m}}(X)$  (la représentation régulière à gauche définie par  ${}^g f(x) = f(g^{-1}x)$ ) est continue.*

**Preuve.** Soit  $f$  une fonction 1-lipschitzienne sur  $X$  contrôlée par un sous-ensemble  $A$  de cardinalité  $< \mathfrak{m}$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , posons

$$V = \bigcap_{a \in A} V[a; \varepsilon].$$

$V$  est un voisinage de l'identité dans  $G$  puisque  $G \in \mathcal{C}$ . Si  $g \in V$ , alors pour tout  $a \in A$  on a :  $|f(ga) - f(a)| < \varepsilon$ . Cette condition implique que pour tout  $x \in X$  et  $g \in V$  on a  $|f(gx) - f(x)| < \varepsilon$ , et ainsi, l'action de  $G$  sur  $E_{\mathfrak{m}}(X)$  est continue. ■

**Remarque 4.15.** *Le groupe  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  est extrêmement moyennable. Ceci découle des résultats de [85] (Théorèmes 6.5 et 6.6)*

## 4.7 Conclusion et perspectives

Au terme de cette étude du groupe des isométries  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$ , des questions demeurent néanmoins à l'esprit.

1. Le groupe  $Iso(\mathbb{U}_{\mathfrak{m}})$  est-il connexe ? connexe par arcs ? comme le groupe  $Iso(\mathbb{U})$  ([72]) ou alors localement connexe ?
2. Un espace métrique ultrahomogène  $X$  ( $< \omega$ -homogène) est dit stable par oscillations (voir chapitre 8 dans [83]) si toute partition  $\gamma$  de  $X$  contient un élément  $A \in \gamma$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , son voisinage d'ordre  $\varepsilon$ ,  $A_{\varepsilon}$  contient une copie isométrique de  $X$ . Un théorème célèbre de Odell et Schlumprecht ([?]) affirme que la sphère unité d'un espace de Hilbert n'est pas stable par oscillations (à des distortions). De même un résultat récent de Nguyen Van Thé et Sauer ([?]) (basé sur un travail préalable de Lopez-Abad et Nguyen Van Thé ([?])) établit la stabilité par oscillations de la sphère unité de l'espace universel polonais d'Urysohn  $\mathbb{U}$ . La sphère unité de l'espace  $\mathbb{U}_{\mathfrak{m}}$  est-elle stable par oscillations ?

# Annexe A

## Notions sur les ordinaux et cardinaux

**Définition A.1.** *Un ensemble d'ensembles  $A$  est dit transitif si tout élément de  $A$  est un élément de  $A$ . De façon précise,  $A$  est transitif si on a :*

$$x \in a \in A \implies x \in A,$$

*c'est-à-dire si  $a \in A$  entraîne  $a \subseteq A$ .*

La notion d'ensembles transitif n'est pas familière, et il semble clair que la plupart des ensembles ne sont pas transitifs.

**Définition A.2.** *On dit qu'un ensemble  $\alpha$  est un ordinal si  $\alpha$  est un ensemble transitif et que la restriction de  $\in$  à  $\alpha$  est un bon ordre strict.*

**Remarque A.1.** 1.  $\emptyset$  est un ordinal, et si  $\alpha$  est un ordinal, il en est de même de  $S(\alpha) = \alpha \cup \alpha$ .

2. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux ordinaux. On déclare  $\alpha < \beta$  vrai si  $\alpha$  est un élément de  $\beta$ . Alors  $<$  est un bon ordre sur les ordinaux.
3.  $S(\alpha)$  est successeur immédiat de  $\alpha$ . Tout ensemble non vide d'ordinaux  $A$  a un plus petit élément, à savoir  $\bigcap_{\alpha \in A} \alpha$  et une borne supérieure, à savoir  $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$
4. Aucun ensemble ne contient tous les ordinaux
5. Les ordinaux non nuls se partagent en ordinaux successeurs, du type  $S(\alpha)$ , et ordinaux limites, qui vérifient  $\lambda = \bigcup_{\alpha \in \lambda} \alpha$ . Le plus petit ordinal limite est  $\omega$  borne supérieure des ordinaux finis.

**Définition A.3.** *Un cardinal est un ordinal qui n'est en bijection avec aucun de ses prédécesseurs.*

Ainsi,

1.  $\aleph_0 := \omega$
2.  $\aleph_1 :=$  le premier ordinal non-dénombrable.
3.  $\aleph_2 :=$  le premier ordinal qui n'est pas en bijection avec  $\aleph_1$ .

En général, pour tout ordinal  $\alpha$ , on définit :

1.  $\aleph_{\alpha+1} :=$  le premier ordinal qui n'est pas en bijection avec  $\aleph_\alpha$ .
2.  $\aleph_\alpha = \bigcup_{\delta < \alpha} \aleph_\delta$  si  $\alpha$  est un ordinal limite.

**Définition A.4.** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux ordinaux. Rappelons les notions suivantes :*

1. *Une application  $f : \alpha \longrightarrow \beta$  est dite cofinale de  $\alpha$  dans  $\beta$  si  $\text{Im}(f)$  est non bornée dans  $\beta$ . (i.e  $\forall \gamma \in \beta, \exists x \in \alpha$  tel que  $f(x) \geq \gamma$ .)*
2. *La cofinalité de  $\beta$ , notée  $\text{cof}(\beta)$ , est le plus petit ordinal  $\alpha$  tel qu'il existe une application cofinale  $f : \alpha \longrightarrow \beta$ .*
3.  *$\beta$  est dit limite si  $\beta = \bigcup_{\tau < \beta} \tau$  ou de manière équivalente  $\beta$  est un point d'accumulation lorsque l'ensemble des ordinaux est muni de la topologie de l'ordre.*
4.  *$\beta$  est dit régulier si  $\beta$  est un ordinal limite et  $\text{cof}(\beta) = \beta$ .*
5. *Un cardinal  $\kappa$  est dit régulier s'il n'est pas la limite d'une suite avec pour ensemble d'indice un ordinal plus petit que  $\kappa$ .  
Tous les cardinaux successeurs sont par exemple réguliers. Par contre,  $\aleph_\omega = \bigcup_{i < \omega} \aleph_i$  n'est pas régulier (est singulier) puisqu'il est la limite de la suite dénombrable des  $\aleph_n$ . ( $\aleph_\omega = \lim_{i \in \omega} \aleph_i$ ).*
6. *Un cardinal  $\alpha$  est dit fortement inaccessible s'il est régulier et si pour tout cardinal  $\beta < \alpha$ , on a  $2^\beta < \alpha$ .*

Soit  $\mathfrak{m}$  un cardinal infini non dénombrable vérifiant la condition (4.1).

Le cardinal  $\aleph_0$  par exemple vérifie la condition (4.1).

Montrons que tout cardinal fortement inaccessible vérifie la condition (4.1).

Soit  $\mathfrak{m}$  un cardinal inaccessible. Posons  $\eta = \sup \{\mathfrak{m}^n : n < \omega\}$ .

Pour tout  $n < \omega$ , on a :  $\mathfrak{m}^n \geq \mathfrak{m}$ . Ainsi  $\eta \geq \mathfrak{m}$ .

Il nous suffit pour conclure de montrer que  $\eta \leq \mathfrak{m}$ . Pour cela, montrons que  $\mathfrak{m}^n \leq \mathfrak{m}$  pour tout  $n < \omega$ .

Fixons  $n < \omega$ . Soient  $M$  un ensemble bien ordonné de cardinalité  $\mathfrak{m}$  et  $N$  un ensemble de cardinalité  $n$ . Notons  $\mathfrak{F}$  l'ensemble des fonctions  $f : N \longrightarrow M$ .

Rappelons que  $\mathfrak{m}^n$  désigne le cardinal de  $\mathfrak{F}$ . Nous devons montrer que le cardinal de  $\mathfrak{F}$  est  $< \mathfrak{m}$ .

Puisque  $\mathfrak{m}$  est un cardinal régulier et  $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ , toute fonction  $f$  de  $N$  dans  $M$  est telle que  $Im(f)$  est bornée par un élément  $b$  dans  $M$ .

Pour tout  $b$  particulier, le nombre de fonctions  $f$  dont l'image est borné par  $b$  est  $\kappa^n$ , où  $\kappa$  est le nombre de prédécesseurs de  $b$ .

Notons que pour tout  $b \in M$ , le  $\kappa$  correspondant est  $< \mathfrak{m}$ . Puisque  $\mathfrak{m}$  est fortement inaccessible,  $\kappa^n < \mathfrak{m}$ . Ainsi l'ensemble  $S_b$  des fonctions  $f : N \longrightarrow M$  dont l'image est bornée par  $b$  a un cardinal  $< \mathfrak{m}$ .

Notons enfin que  $\mathfrak{F} = \bigcup_{b \in M} S_b$ . Donc  $\mathfrak{F}$  est la réunion de  $\mathfrak{m}$  ensembles de cardinal au plus  $\mathfrak{m}$  (en réalité chacun des ensembles a un cardinal strictement plus petit que  $\mathfrak{m}$ ). Ainsi la réunion a un cardinal au plus  $\mathfrak{m}$ , comme souhaité.

- Remarque A.2.** 1. *L'existence des cardinaux fortement inaccessible est indépendante des axiomes ZFC. Par contre, nous avons eu besoin des axiomes ZFC pour montrer que tout cardinal fortement inaccessible vérifie la condition (4.1).*
2. *L'hypothèse du continu généralisée (HCG) affirme que  $2^\kappa = \kappa^+$  pour tout cardinal infini  $\kappa$ . Moyennant HCG, tout cardinal infini successeur  $k^+$  vérifie la condition (4.1).  
En effet, pour  $n < k^+$ , on a :  $(k^+)^n = (2^k)^n = 2^{kn} = 2^k = k^+$ .*
3. *L'existence des cardinaux vérifiant la condition (4.1) est indépendante des axiomes ZFC.*

# Annexe B

## Quelques notions de topologie

### B.1 Poids et densité d'un espace topologique

**Définition B.1.** Soit  $X$  un espace topologique. Rappelons que le poids de  $X$  est le nombre cardinal  $\omega(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ est une base de } X\}$  et la densité de  $X$  est le nombre cardinal  $d(X) = \min\{|A| : A \text{ est une partie dense de } X\}$ .

**Remarque B.1.** 1. Pour tout espace topologique, nous avons  $d(X) \leq \omega(X)$ .

En effet, si  $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s \in S}$  est une base pour  $X$  constituée des ensembles non-vides et tels que  $|S| = m = \omega(X)$ . Choisissons pour tout  $s \in S$  un point  $a_s \in U_s$  et montrons que l'ensemble  $A = \{a_s : s \in S\}$  est dense dans  $X$ . En effet, tout ouvert non vide de  $X$  contient un élément  $U_s \in \mathcal{B}$ , ainsi il contient le point  $a_s \in A$ . Puisque  $|A| \leq |S| = m$ , on a  $d(X) \leq \omega(X)$ . En particulier, tout espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité est séparable

2. Si  $X$  est un espace métrisable, alors  $d(X) = \omega(X)$ .

En effet, si  $A$  est un sous-espace dense de  $X$  de cardinalité  $|A| = d(X) = k$  avec  $k$  infini, considérons  $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in A; r \in \mathbb{Q}\}$ . Il est clair que  $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0 \times k = k$ . Montrons pour terminer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $X$ . Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$  et soit  $x \in U$  alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset U$ . Puisque  $A$  est dense dans  $X$ , il existe  $a \in A$  et  $a \in B(x, \frac{\varepsilon}{3})$ . Soit  $r \in \mathbb{Q}$  tel que  $\frac{\varepsilon}{3} < r < \frac{\varepsilon}{2}$ , alors  $x \in B(a, r)$  et  $B(a, r) \in \mathcal{B}$ . De plus,  $B(a, r) \subset B(x, \varepsilon)$ . En effet, soit  $y \in B(a, r)$ , on a  $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r < \varepsilon$ . Posons  $B_x = B(a, r)$ . On a donc montrer que : pour tout  $x \in U$ , il existe  $B_x \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B_x \subset U$ .

## B.2 Topologie compact-ouvert

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles arbitraires et soient  $A \subset X$  et  $B \subset Y$ . Nous écrirons  $Y^X$  pour désigner l'ensemble des applications de  $X$  dans  $Y$  et  $F(A, B)$  le sous-ensemble de  $Y^X$  formé des applications appliquant  $A$  dans  $B$  :

$$F(A, B) = \{f \in Y^X : f(A) \subset B\}$$

A présent, soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques et soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des compacts de  $X$  et  $\mathcal{G}$  l'ensemble des ouverts de  $Y$ . La topologie sur  $Y^X$  engendrée par

$$\mathcal{S} = \{F(A, B) : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{G}\}$$

est appelée la topologie définie par un compact et un ouvert ou tout simplement topologie compacte-ouverte et  $\mathcal{S}$  est la sous-base de définition de cette topologie.

## B.3 Groupes polonais

Un espace métrisable à base dénombrable est un espace polonais si sa topologie peut être définie par une distance qui en fait un espace complet. Cette terminologie a été introduite par le groupe Nicolas Bourbaki, dans son volume sur la topologie générale.

Rappelons qu'un sous-espace  $A$  d'un espace topologique  $X$  est dit  $G_\delta$  s'il existe une famille dénombrable  $(O_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $X$  tels que  $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$ . Tout sous-espace  $G_\delta$  d'un espace polonais est également polonais ([3]).

$\mathbb{N}$  étant muni de la topologie discrète, l'espace de Baire  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  est un espace polonais. On dit qu'un groupe topologique  $G$  est un groupe polonais si la topologie de  $G$  est polonaise. Le lecteur pourra se reporter à [9] ou [57] pour une introduction complète à la théorie des groupes polonais.

Nous allons à présent introduire deux exemples classiques de groupes polonais qui seront très utiles dans la suite de la thèse.

### B.3.1 Le groupe symétrique infini $S_\infty$

$S_\infty$  désigne le groupe de toutes les bijections de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .  $S_\infty$  muni de la topologie induite de celle de l'espace de Baire  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , est un  $G_\delta$ -sous-espace.



En effet, en posant

$$\mathcal{A} = \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sigma \text{ est injective}\}$$

et

$$\mathcal{B} = \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sigma \text{ est surjective}\}.$$

Nous avons donc  $S_{\infty} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ . En remarquant que

$$\mathcal{A} = \bigcap_{m \neq n} \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sigma(n) \neq \sigma(m)\}$$

et

$$\mathcal{B} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sigma(n) = m\},$$

on conclut que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des  $G_{\delta}$  sous-espace de  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Ainsi,  $S_{\infty}$  est un  $G_{\delta}$  sous-espace de  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . C'est donc un groupe polonais.

Soit  $A \subseteq \mathbb{N}$  tel que  $|A| < \infty$ . Posons  $St_A = \{g \in S_{\infty}, \forall a \in A \quad g(a) = a\}$ .

La famille  $\Sigma = \{St_A : |A| < \infty\}$  est une base de voisinages de  $e$  pour la topologie polonaise de  $S_{\infty}$  formé des sous-groupes ouverts. On dit encore que  $S_{\infty}$  est non archimédien.

### B.3.2 Le groupe $Homeo(D^{\aleph_0})$

Commençons par des rappels sur l'ensemble de Cantor. Notons  $D = \{0, 1\}$ . L'espace produit  $D^{\aleph_0}$  est l'ensemble de Cantor. Posons  $I = [0, 1]$ . Considérons l'opération  $T$  : à enlever le "tiers central" sur  $I$ .

On pose  $I_1 = T([0, 1])$ ;  $I_{n+1} = T(I_n)$ ;  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ .  $C$  est appelé ensemble triadique

de Cantor.  $I_n$  est la réunion des  $2^n$  segments disjoints de longueur  $3^{-n}$ , d'origine

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j 3^{-j} \text{ où } \alpha_j = 0, 2.$$

En effet, la propriété a lieu à l'étape 1 :  $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ .

Si elle a lieu aux étapes 1, ...,  $n$ , on a :

$$C_n = \bigcup_{\alpha} I_n(\alpha)$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  parcourt  $\{0, 2\}^n$  et où

$$I_n(\alpha) = [\sum_{j=1}^n \alpha_j 3^{-j}, \sum_{j=1}^n \alpha_j 3^{-j} + 3^{-n}].$$

on voit que

$$T[I_n(\alpha)] = I_{n+1}(\alpha^0) \cup I_{n+1}(\alpha^1)$$

où  $\alpha^0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)$  et  $\alpha^1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 2)$ , ce qui donne

$$C_{n+1} = \bigcup_{\alpha} (I_{n+1}(\alpha^0) \cup I_{n+1}(\alpha^1)) = \bigcup_{\beta} I_{n+1}(\beta)$$

où  $\beta$  parcourt  $\{0, 2\}^{n+1}$ . On a donc :  $I_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_n^j$ . De plus, l'application

$$\begin{aligned} \varphi : D^{\aleph_0} &\longrightarrow C \\ x = (x_j) &\longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. L'ensemble de Cantor désigne selon le cas l'ensemble triadique  $C$  ou  $D^{\aleph_0}$ .

$Homeo(D^{\aleph_0})$  désigne le groupe de tous les homéomorphismes de  $D^{\aleph_0}$  sur lui même. Comme  $D^{\aleph_0}$  est compact, la topologie de la convergence uniforme sur  $Homeo(D^{\aleph_0})$  coïncide avec la topologie compact-ouvert.

On montre comme dans le cas de  $S_{\infty}$  que  $Homeo(D^{\aleph_0})$  est un  $G_{\delta}$  sous-espace de  $C(D^{\aleph_0}, D^{\aleph_0})$ . Ce qui permet de conclure que  $Homeo(D^{\aleph_0})$  est polonais

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $H_n = \{g \in G : g(I_n^j) = I_n^j \ \forall 1 \leq j \leq 2^n\}$ .

La famille  $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$  constitue une base de voisinages de  $e$  dans  $Homeo(D^{\aleph_0})$  constitué de sous-groupes ouverts.

## B.4 Compactifié de Stone-Čech

Soit  $X$  un espace séparé complètement régulier. Notons  $\mathbb{I} = [0, 1]$  et  $C(X)$  l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $\mathbb{I}$ . Posons  $\tilde{X} = \mathbb{I}^{C(X)}$  et considérons l'application

$$\begin{array}{ccccc} \varepsilon : X & \longrightarrow & \mathbb{I}^{C(X)} & & \\ x \longmapsto & \longrightarrow & \varepsilon(x) : C(X) & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & & f \longmapsto & \longrightarrow & \varepsilon(x)(f) = f(x) \end{array}$$

Notons  $\beta X$  l'adhérence de  $\varepsilon(X)$  dans  $\tilde{X}$ .  $\beta X$  est un compactifié de  $X$  appelé Compactifié de Stone-Čech de  $X$ . De plus,  $\beta X$  vérifie les propriétés suivantes :

**Théorème B.1.** 1. Soit  $X$  un espace complètement régulier séparé. Si  $Y$  est un espace compact et  $g : X \longrightarrow Y$  est une application continue, alors  $g$  se prolonge uniquement en une application continue  $\tilde{g} : \beta X \longrightarrow Y$

2. La topologie induite sur  $X$  par celle de  $\beta X$  coïncide avec la topologie initiale de  $X$

3.  $X$  est dense dans  $\beta X$ .

## B.5 Dimension de Lebesgue

**Définition B.2.** Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux recouvrements d'un espace topologique  $X$ .

1.  $\mathcal{B}$  est un raffinement de  $\mathcal{A}$  si pour tout  $B \in \mathcal{B}$ , il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $B \subset A$ . Ce sera un raffinement ouvert si  $\mathcal{B}$  est également constitué d'ensembles ouverts.
2. L'ordre de  $\mathcal{A}$  est défini comme étant le plus grand nombre entier  $n$  tel qu'il existe  $n + 1$  éléments de  $\mathcal{A}$  ayant une intersection non vide.

**Définition B.3.** Soit  $X$  un espace topologique, la dimension de Lebesgue  $\dim(X)$  de  $X$  est le plus petit entier  $n$  tel que tout recouvrement ouvert de  $X$  possède un raffinement d'ordre  $\leq n$ . Si un pareil entier  $n$  n'existe pas, on dit que  $\dim(X) = \infty$ .

**Exemple B.1.** ([75], Exemples 1 et 2, page 305)

1. Tout sous-espace compact  $X$  de  $\mathbb{R}$  est de dimension de Lebesgue au plus 1.
2. L'espace compact  $X = [0, 1]$  est de dimension de Lebesgue 1.

**Théorème B.2.** ([?]) Un espace compact  $X$  est totalement discontinu si et seulement si  $\dim(X) = 0$ .

## B.6 Produit diagonal

**Définition B.4.** Soient  $X$  un espace topologique,  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de fonctions de  $X$  dans  $X_i$ . Le produit diagonal des fonctions  $f_i$  est la fonction  $\Delta_i f_i : X \longrightarrow \prod_i X_i$  définie par  $\Delta_i f_i(x) = (f_i(x))$ .

**Lemme B.1.** Si toutes les fonctions  $f_i$  sont continues, alors le produit diagonal des fonctions  $f_i$  est également continue.

## B.7 Systèmes projectifs

Rappelons la notion de système projectif de  $G$ -espaces en nous appuyant sur [?].  $G$  étant un groupe topologique, un système projectif de  $G$ -espaces est la donnée d'un triplet  $(X_i, \pi_{ij}, I)$  où  $(I, \preceq)$  est un ensemble ordonné,  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille de  $G$ -espaces compacts et une famille d'applications équivariantes  $\pi_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ , pour  $i \preceq j$  tel que  $\pi_{ii}$  est l'identité de  $X_i$  pour tout  $i \in I$  et  $\pi_{ik} = \pi_{ij} \circ \pi_{jk}$  pour tout  $i \preceq j \preceq k$ . La limite projective  $X = \varprojlim (X_i, \pi_{ij})$  du système projectif de  $G$ -espaces  $(X_i, \pi_{ij}, I)$  est le  $G$ -espace définie comme suit :  $\prod_{i \in I} X_i$  est l'ensemble produit des ensembles  $(X_i)_{i \in I}$  et  $pr_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$  la projection sur le facteur  $X_i$ .

$$\varprojlim (X_i, \pi_{ij}) = \{x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i / x_i = \pi_{ij}(x_j) \quad i \preceq j\}.$$

Ou encore

$$\varprojlim (X_i, \pi_{ij}) = \{x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i / pr_i(x) = \pi_{ij} \circ pr_j(x) \quad i \preceq j\}.$$

On note tout simplement  $X = \varprojlim X_i$  si aucune confusion n'est possible.  $\varprojlim X_i$  est un sous-espace fermé, donc compact de  $\prod_{i \in I} X_i$ .  $G$  opère continûment sur  $\prod_{i \in I} X_i$  par  $g.x = (g.x_i)$  où  $x = (x_i)$ . La restriction  $\pi_i$  de la projection  $pr_i$  à  $X$  est l'application canonique de  $X$  dans  $X_i$ . On a la relation :  $\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$  pour tout  $i \preceq j$ .

## B.8 Structure uniforme

Commençons par introduire les notations suivantes :

Soit  $X$  un ensemble non vide et soient  $V$  et  $W$  deux parties de  $X \times X$ .

1.  $V \circ W$  désigne l'ensemble des couples  $(x, y) \in X \times X$  tel qu'il existe  $z \in X$  tel que  $(x, z) \in W$  et  $(z, y) \in V$ .
2.  $V^{-1}$  est l'ensemble des couples  $(x, y) \in X \times X$  tel que  $(y, x) \in V$ .

**Définition B.5.** On appelle structure uniforme sur un ensemble  $X$ , une famille non vide  $\mathcal{U}_X$  de parties de  $X \times X$  vérifiant les conditions suivantes :

1. Tout élément  $U \in \mathcal{U}_X$  contient la diagonale  $\Delta_X$  de  $X \times X$ .
2. Si  $U \in \mathcal{U}_X$ , alors  $U^{-1} \in \mathcal{U}_X$

3. Si  $U \in \mathcal{U}_X$ , alors il existe  $V \in \mathcal{U}_X$  tel que  $V \circ V \subseteq U$ .
4. Si  $U, V \in \mathcal{U}_X$ , alors  $U \cap V \in \mathcal{U}_X$ .
5. Si  $U \in \mathcal{U}_X$  et  $U \subseteq V$  alors  $V \in \mathcal{U}_X$

La paire  $(X, \mathcal{U}_X)$  constituée d'un ensemble et d'une structure uniforme est appelé un espace uniforme et les éléments de  $\mathcal{U}_X$  sont appelés les entourages de la diagonale.

**Définition B.6.** Une sous-famille  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$  est une base de la structure uniforme  $\mathcal{U}_X$  si pour tous  $U, V \in \mathcal{B}$ , il existe  $C \in \mathcal{B}$  tel que  $C \subseteq U \cap V$  et tout entourage  $V \in \mathcal{U}_X$  contient un élément  $U \in \mathcal{B}$ .

Une famille  $\mathcal{B}$  de parties de  $X \times X$  est une base pour une structure uniforme si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tous  $U, V \in \mathcal{B}$ , il existe  $C \in \mathcal{B}$  tel que  $C \subseteq U \cap V$ .
2. Tout élément  $U \in \mathcal{B}$  contient la diagonale  $\Delta_X$  de  $X \times X$
3. Si  $V \in \mathcal{B}$ , alors il existe  $U \in \mathcal{B}$  tel que  $U \subseteq V^{-1}$
4. Si  $V \in \mathcal{B}$ , alors il existe  $U \in \mathcal{B}$  tel que  $U \circ U \subseteq V^{-1}$

**Exemple B.2.** 1. Toute métrique  $d$  sur un ensemble  $M$  engendre une structure uniforme  $\mathcal{U}_d$  sur  $M$  ayant pour base les ensembles

$$U_d^\varepsilon = \{(x, y) \in M \times M : d(x, y) < \varepsilon\}$$

où  $\varepsilon > 0$ .

2. L'ensemble de tous les sous-ensembles de  $X \times X$  contenant la diagonale forme une structure uniforme sur  $X$  dite structure uniforme discrète.
3. L'ensemble constitué uniquement de  $X \times X$  est une structure uniforme sur  $X$  dite structure uniforme triviale sur  $X$ .

**Définition B.7.** Soit  $G$  un groupe topologique. Il existe sur  $G$  deux structures uniformes bien connues : La structure uniforme droite que nous noterons  $\mathcal{U}_R(G)$  et la structure uniforme gauche que nous noterons  $\mathcal{U}_L(G)$ .

1. Soit  $V$  un voisinage de  $e$  dans  $G$ . Posons  $V_d = \{(x, y) : xy^{-1} \in V\}$ .  
La famille des ensembles  $V_d$  lorsque  $V$  parcourt une base de voisinages de  $e$  forme une base d'entourages pour la structure uniforme droite  $\mathcal{U}_R(G)$  sur  $G$ .
2. Soit  $V$  un voisinage de  $e$  dans  $G$ . Posons  $V_g = \{(x, y) : x^{-1}y \in V\}$ .  
La famille des ensembles  $V_g$  lorsque  $V$  parcourt une base de voisinages de  $e$  forme une base d'entourages pour la structure uniforme gauche  $\mathcal{U}_L(G)$  sur  $G$ .

**Définition B.8.** (Topologie d'un espace uniforme) Soit  $(X, \mathcal{U}_X)$  un espace uniforme. La structure uniforme  $\mathcal{U}_X$  induit sur  $X$  une topologie appelée topologie uniforme.

Cette topologie est constituée des parties  $\mathcal{O} \subseteq X$  telles que pour tout  $x \in \mathcal{O}$ , il existe  $V \subseteq \mathcal{U}_X$  tel que  $V[x] \subseteq \mathcal{O}$ . Avec  $V[x] = \{y \in X : (x, y) \in V\}$ .

**Remarque B.2.** D'après ce qui précède, tout espace uniforme induit un espace topologique. La réciproque est donnée par le résultat suivant :

**Théorème B.3.** [104] Un espace topologique  $X$  est uniformisable si et seulement s'il est complètement régulier.

**Proposition B.1.** Soit  $(G, \tau)$  un groupe topologique. Les deux topologies uniformes induites respectivement par la structure uniforme droite et gauche sur  $G$  coïncide avec la topologie initiale  $\tau$

**Définition B.9.** Une application  $f$  d'un espace uniforme  $(X, \mathcal{U}_X)$  dans un espace uniforme  $(Y, \mathcal{U}_Y)$  est dite uniformément continue si, pour tout entourage  $V$  de  $\mathcal{U}_Y$ , il existe un entourage  $U$  de  $\mathcal{U}_X$  tel que la relation  $(x, y) \in U$  entraîne  $(f(x), f(y)) \in V$ .

**Remarque B.3.** De manière équivalente, Une application  $f$  d'un espace uniforme  $(X, \mathcal{U}_X)$  dans un espace uniforme  $(Y, \mathcal{U}_Y)$  est dite uniformément continue si, pour tout entourage  $V$  de  $\mathcal{U}_Y$ , on a :  $\{(x, y) \in X \times X : (f(x), f(y)) \in V\} \subseteq \mathcal{U}_X$ .

**Remarque B.4.** 1. Si dans la définition précédente,  $X$  est un groupe topologique, alors l'application  $f$  sera dite uniformément continue à gauche si elle est uniformément continue par rapport à la structure uniforme gauche. De manière similaire, l'application  $f$  sera dite uniformément continue à droite si elle est uniformément continue par rapport à la structure uniforme droite.

2. En particulier, une fonction sur un groupe topologique  $G$  à valeurs réelles sera dite uniformément continue à gauche si : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $e$  tel que  $x^{-1}y \in V \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

3. De même, une fonction définie sur un groupe topologique  $G$  à valeurs réelles sera dite uniformément continue à droite si : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $e$  tel que  $xy^{-1} \in V \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

**Exemple B.3.** 1. L'inversion sur  $G$  est uniformément continue de la structure uniforme droite  $\mathcal{U}_R(G)$  sur la structure uniforme gauche  $\mathcal{U}_L(G)$ .

2. La translation à gauche et la translation à droite sont uniformément continues pour les paires de structures uniformes :  $(\mathcal{U}_R(G), \mathcal{U}_R(G))$  et  $(\mathcal{U}_L(G), \mathcal{U}_L(G))$ .

# Annexe C

## Quelques théorèmes classiques

### C.1 Théorème de Krein-Milman

**Définition C.1.** Soit  $A$  une partie d'un espace localement convexe.

1. Un sous-ensemble non-vidé  $M$  est un sous-ensemble extrême de  $A$  si pour tout  $x \in M$  tel que  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$  avec  $0 < \alpha < 1$  et  $y, z \in A$  alors  $y, z \in M$
2. Un point  $x_0 \in M$  est un point extrême de  $M$  si  $\{x_0\}$  est un sous-ensemble extrême de  $M$ . Nous noterons  $\text{Extr}(M)$  l'ensemble des points extrémaux de  $M$ .
3. On notera  $\text{conv}(A) = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \text{ et } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$  l'enveloppe convexe de  $A$ .

**Définition C.2.** (Topologie faible) Soit  $L$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et soit  $L^\#$  l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur  $L$ . Considérons un sous-espace  $F \subseteq L^\#$  qui sépare les points de  $L$  : Pour tout  $x_1 \neq x_2$ , il existe  $f \in F$  tel que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . La topologie faible sur  $F$ , notée  $w(F)$  est la topologie dont une base de voisinages de  $x_0$  est constitué des ensembles

$$N(x_0; A; \varepsilon) = \{x \in L : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, f \in A\}$$

Où  $x_0 \in L$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $A$  est une partie finie de  $F$ .

En particulier :

1. Si  $L$  est un espace de Banach et  $F = L'$  est son dual topologique, il s'agit de la topologie faible
2. Si  $L = X'$  est le dual topologique d'un espace de Banach, il s'agit de la topologie vague.

**Théorème C.1.** (Krein-Milman [28]) Soit  $L$  un espace vectoriel et soit  $K$  un ensemble compact et convexe de  $(L, w(F))$ . Alors  $\text{Extr}(K) \neq \emptyset$  et  $\overline{\text{conv}(\text{Extr}(K))} = K$ .

## C.2 Théorème de Gelfand

**Définition C.3.** On appelle algèbre normée un couple  $(A, \|\cdot\|)$  où  $A$  est une algèbre et  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $A$  qui vérifie en plus :  $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$  pour tous  $a, b \in A$

**Définition C.4.** Une algèbre normée est dite de Banach si la norme  $\|\cdot\|$  est une norme complète.

**Définition C.5.** Soit  $A$  une algèbre. Une involution sur  $A$  est une application  $\star : A \longrightarrow A$  vérifiant pour tous  $a, b \in A$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

1.  $(\alpha a + \beta b)^\star = \overline{\alpha} a^\star + \overline{\beta} b^\star$
2.  $(a^\star)^\star = a$
3.  $(ab)^\star = b^\star a^\star$

**Définition C.6.**  $A$  est une  $C^\star$ -algèbre si  $A$  est une algèbre de Banach muni d'une involution vérifiant :  $\|a^\star a\| = \|a\|^2$  pour tout  $a \in A$ .

**Définition C.7.** Soit  $A$  une algèbre commutative sur un corps(commutatif)  $\mathbb{K}$ . On appelle caractère ou fonctionnelle multiplicative de  $A$  tout morphisme d'algèbres  $\chi : A \longrightarrow \mathbb{K}$  non identiquement nul.

**Lemme C.1.** Soit  $A$  une algèbre de Banach commutative et unifère. Alors le spectre de  $A$  noté  $X_A$  muni de la topologie de Gelfand est un espace compact.

**Théorème C.2.** (Gelfand) Si  $A$  est une  $C^\star$ -algèbre de Banach commutative et unifère, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} : A & \longrightarrow & \mathcal{C}(X_A) \\ a \longmapsto & \mathcal{G}(a) : X_A & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \chi \longmapsto & \mathcal{G}(a)(\chi) = \chi(a) \end{array}$$

appelée transformation de Gelfand est un isomorphisme isométrique de  $A$  sur l'algèbre des fonctions continues sur l'espace compact  $X_A$ .

**Lemme C.2.** (Hahn-Banach[3]) Soit  $F \subseteq E$  un sous-espace d'un espace localement convexe  $E$  tel que  $\overline{F} \neq E$ , alors il existe une forme linéaire continue  $f \in E'$ ,  $f \neq 0$  tel que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in F$ .



# Références

- [1] Y. Al-Gadid : *A new characterization of topologically amenable groups*, Thesis of Master of Science in Mathematics of University of Ottawa, 2007
- [2] Y. Al-Gadid, B. Mbombo, and V. Pestov. *Sur les espaces test pour la moyennabilité*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **33** :65–77, 2011.
- [3] C. Aliprantis and K. Border. *Infinite dimensional Analysis*. Springer-Verlag.
- [4] Anantharaman-Delaroche. *Amenability and exactness for dynamical systems and their  $C^*$ -algebras*, Trans. Amer. Soc. **10** (2002), 4153–4178.
- [5] R. Arens. *Topologies for homéomorphism groups*, In M. Hazewinkel, editor, Handbook of Algebra, volume 2, pages 1–77. North-Holland, 2000.
- [6] C. J. Atkin. *Boundedness in uniform spaces, topological groups, and homogeneous spaces*, Acta Math. Hungar **57** (1991), 213–232.
- [7] J. Auslander. *Minimal flows and their extensions*, North Holland, 1988.
- [8] S. Banach and A. Tarski. *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*, Fund. Math. **6** (1924), 244–277.
- [9] H. Becker and A. S. Kechris. *The Descriptive Set theory of Polish Group Actions*, London Math. Soc. Lecture Note Series 232, Cambridge Univ. Press, 1996.
- [10] B. Bekka and P. de la Harpe. *Kazhdan’s Property (T)*, Prepublication.
- [11] I. Ben Yaacov, A. Berenstein, C.W. Henson, and A. Usvyatsov, *Model Theory for Metric Structures*, in : Model theory with applications to algebra and analysis. Vol. 2, 315–427, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **350**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [12] G. M. Bergman. *Generating infinite symmetric groups*, Bull. London Math. Soc. **23** (2006), 429–440.
- [13] C. Bessaga and A. Pelczynski, *Selected Topics in Infinte-Dimensional Topology*, PWN, Warszawa (1975).

- [14] S. Bogatyi and V.V. Fedorchuk, *Schauder's fixed point theorem and amenability of a group*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder center **29** (2007), 383–401.
- [15] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques : Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris, 1958-1961.
- [16] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques : Livre III, Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1958-1961.
- [17] N. Bourbaki, *Intégration*, Hermann, Paris, 1963.
- [18] A. Bouziad and J.-P. Troallic. *Problems about the uniform structures of topological groups*, in : *Open problems in topology. II*, Edited by Elliott Pearl, Elsevier B.V., Amsterdam,, 2007, 359–366.
- [19] R. B. Brook, *A construction of the greatest ambit*, Mathematical Systems Theory **4** (1970), 243–248.
- [20] N.P. Brown and N. Ozawa,  *$C^*$ -Algebras and Finite-Dimensional Approximations*, Graduate Studies in Mathematics **88**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2008.
- [21] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. I*, New York-Amsterdam, 1969.
- [22] W.W. Comfort and K.A. Ross, *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups*, Pacific J. Math. **16** (1966), 483–496.
- [23] C. Constantinescu.  *$C^*$ -algebras, Vol. 2 : Banach Algebras and Compact Operators*, North Holland, 2001.
- [24] P. de la Harpe, *Moyennabilité de quelques groupes topologiques de dimension infinie*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. **A 277** (1973), 1037–1040.
- [25] J. de Vries, *Elements of Topological Dynamics*, Kluwer, 1993.
- [26] A. N. Dranishnikov, *On generalized amenability*, Preprint (1999).
- [27] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators. Part I. General theory*, Pure and applied mathematics, Wiley Classics Library, New York, 1988.
- [28] Y. Eidelman, V. Milman and A. Tsoolomitis, *Functional Analysis : An Introduction*, AMS (2004).
- [29] R. Ellis, *Universal Minimal Sets*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **11** (1960), 540–543.
- [30] R. Engelking, *General Topology*, Publishers Warsaw, 2006.
- [31] P. Eymard, *Initiation à la théorie des groupes moyennables*.
- [32] I. Farah and S. Shelah, *A dichotomy for the number of ultrapowers*, arXiv :0912.0406v1 [math.LO].

- [33] J. Flood, *Free Topological Vector Spaces*, Ph.D. thesis, Australian National University, Canberra, 1975, 109 pp.
- [34] J. Flood, *Free locally convex spaces*, Dissertationes Math. **CCXXI** (1984), PWN, Warszawa.
- [35] D.H. Fremlin, *Measure theory, vol. 4*, Torres-Fremlin, 2003.
- [36] K. Funano, *Concentration of maps and group actions*, Geom. Dedicata. **149** (2010), 103–119.
- [37] T. Giordano and P. de la Harpe, *Moyennabilité des groupes dénombrables et actions sur les ensembles de Cantor*, C.R.Acad.Sci.Paris Sér. **324** (1997), 1255–1258.
- [38] T. Giordano and V.G. Pestov, *Some extremely amenable groups*, C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I **4** (2002), 273–278.
- [39] T. Giordano and V.G. Pestov, *Some extremely amenable groups related to operator algebras and ergodic theory*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), 279–315.
- [40] E. Glasner, *On minimal actions of Polish groups*, Top. Appl. **85** (1998), 119–125.
- [41] E. Granirer, *Extremely amenable semigroups I*, Math. Scand. **17** (1965), 177–179.
- [42] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Progress in Mathematics 152, Birkhauser Verlag, 1999.
- [43] M. Gromov and V.D. Milman, *A topological application of the isoperimetric inequality*, Amer. J. Math. **105**(1983), 843–854.
- [44] I.I. Guran, *Topological groups similar to Lindelöf groups* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **256** (1981), no. 6, 1305–1307.
- [45] P. Hafner and G. Mazzola, *The cofinal character of uniform spaces and ordered field*, Z. Math. Log. Grund. Math. **17** (1971), 377–384.
- [46] P. R. Halmos, *Naive set theory*, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1974. Reprint of the 1960 edition.
- [47] E. Hewitt, *A remark on density characters*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 641–643.
- [48] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. 1*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [49] N. Higson and J. Roe, *Amenable groups actions and the Novikov conjecture*, J. reine angew. Math **519** (2000), 143–153.
- [50] G.E Huhunaisvili, *On a property of Uryson universal metric space(en russe)*, Dokl. Akad. Nauk. USSR (N. S) **101** (1955), 332–333.

- [51] G. Itzkowitz, *Continuous measures, Baire category, and uniform continuity in topological groups*, Pacific J. Math. **54** (1974), 115–125.
- [52] G. Itzkowitz, *Uniformities and uniform continuity on topological groups*, General topology and its Applications, **134** (1991), 155–178.
- [53] G. Itzkowitz, *Projective limits and balanced topological groups*, General topology and its Applications, **110** (2001), 163–183.
- [54] G.I. Kac, *Isomorphic mapping of topological groups into a direct product of groups satisfying the first countability axiom* (Russian), Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **8** (1953). no. 6(58), 107–113.
- [55] N. Kalton, *Extending Lipschitz maps in  $C(K)$  spaces*, preprint, **2005** (2001), 163–183.
- [56] M. Katětov, *On universal metric spaces*, in : Gen. Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI, Proc. Sixth Prague Topol. Symp. 1986, Z. Frolik, ed., Heldermann Verlag (1988), 323–330.
- [57] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer-Verlag (1995).
- [58] A.S. Kechris, V.G. Pestov, S. Todorcevic, *Fraissé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups.*, GAFA, Geom. Funct. Anal. **15** (2005), 106–189.
- [59] A.S. Kechris and C. Rosendal, *Turbulence, amalgamation and generic automorphisms of homogeneous structures*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **94** (2007), 302–350.
- [60] O. H. Keller, *Die Homeomorphie der kompakten konvexen Mengen in Hilbertschen Raum*, Math. Ann. **14** (1931), 748–758.
- [61] F. Krieger, *Sur les invariants topologiques des actions de Groupes Moyennables Discrets*, thèse de doctorat de l’université de Strasbourg.
- [62] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Math. Surveys and Monographs, 89, Amer. Math. Soc., 2001.
- [63] A. Lieberman, *The structure of certain unitary representations of infinite symmetric groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 189–198.
- [64] J. Lopez-Abad and L. Nguyen Van Thé, *The oscillation stability problem for the Urysohn sphere : a combinatorial approach*, Topology Appl. **155** (2008), 1516–1530.
- [65] R. D. Mauldin, *The Scottish Book*, Boston-Basel-Stuttgart 1981.
- [66] B. Maurey, *Constructions des suites symétriques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. **288** (1979), 679–681.
- [67] B. Mbombo and V. Pestov, *Subgroups of isometries of Urysohn-Katětov metric spaces of uncountable density*, Accepted to appear in Topology and its Applications

- [68] M. Megreslishvili, P. Nickolas and V. Pestov, *Uniformities and uniformly continuous functions on locally connected groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **56** (1997), 279–283.
- [69] M. Megrelishvili and T. Scarr, *The Equivariant Universality and Couniversality of the Cantor Cube*, Fundamenta Mathematicae
- [70] J. Melleray, *Géométrie de l'espace d'Urysohn et théorie descriptives des ensembles*, thèse de doctorat, l'université Paris 6, Decembre 2005.
- [71] J. Melleray, *On the geometry of Urysohn's universal metric space*, Topology Appl. **154** (2007), 384–403.
- [72] J. Melleray, *Topology of the isometry group of the Urysohn space*, Fund. Math. **207** (2010), 273–287.
- [73] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. 1200. Springer, 1986.
- [74] S.A. Morris, *Varieties of topological groups (a survey)*, Colloq. Math. **XLVI** (1982), 147–165.
- [75] J. Munkres, *Topology, Second Edition* Prentice Hall, Inc. 1975.
- [76] J. V. Neumann, *Zur allgemeinen Theorie der Massen*, Fund. Math. **13** (1929), 73–116.
- [77] L. Nguyen Van Thé, *Structural Ramsey Theory of Metric Spaces and Topological Dynamics of Isometry Groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **206** (2010), no. 968.
- [78] L. Nguyen Van Thé and N.W. Sauer, *The Urysohn sphere is oscillation stable*, Geom. Funct. Anal. **19** (2009), 536–557.
- [79] E. Odell and T. Schlumprecht, *The distortion problem*, Acta Math. **173** (1994), 259–281.
- [80] N. Ozawa, *Amenable actions and exactness for discrete groups.*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **08** (2000), 691–695.
- [81] A.T. Paterson, *Amenability*, University Math. Surveys and Monographs 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [82] V.G. Pestov, *Embeddings and condensations of topological groups* (Russian), Mat. Zametki **31** (1982), no. 3, 443–446.
- [83] V. Pestov, *Dynamics of Infinite-Dimensional Groups : the Ramsey-Dvoretzky-Milman phenomenon*, Amer. Math. Soc. University Lecture Series **40**, 2006.
- [84] V.G. Pestov, *On free actions, minimal flows, and a problem by Ellis*, Trans. of the American Mathematical Society **350** (1998), 4149–4165.

- [85] V.G. Pestov, *Ramsey-Milman phenomenon, Urysohn metric spaces, and extremely amenable groups*, Israel Journal of Mathematics **127** (2002), 317–358. Corrigendum, *ibid.*, **145** (2005), 375–379.
- [86] V.G. Pestov, *Dynamics of Infinite-dimensional Groups and Ramsey-type phenomena*, Impa, Brazil 2005.
- [87] J-P. Pier, *Amenable Locally Compact groups*, New York, 1984.
- [88] E.S. Pondiczery, *Power problems in abstract spaces*, Duke Math. J. **11** (1944), 835–837.
- [89] I.V. Protasov, *Functionally balanced groups*, Math. Notes **49** (1991), 614–616.
- [90] I.V. Protasov and A. Saryev, *The semigroup of closed subsets of a topological group* (Russian), Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Khim. Geol. Nauk 1988, no. 3, 21–25.
- [91] W. Roelcke and S. Rierolf, *Uniform Structure on Topological Group and Their Quotient*, McGraw-Hill, 1981.
- [92] C. Rosendal, *A topological version of the Bergman property*, Forum Math. **21** (2009), 299–332.
- [93] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe, troisième édition*, Dunod, Paris, 1998.
- [94] P. Samuel, *Ultrafilters and compactification of uniform spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 100–132.
- [95] J. Schauder, *Zur Theorie stetiger abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Z. **26** (1927), 47–65.
- [96] W. Sierpinski, *Sur un espace métrique universel*, Fund. Math. **33** (1945), 115–122.
- [97] S. Teleman, *Sur la représentation linéaire des groupes topologiques*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **74** (1957), 319–339.
- [98] P. S. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, C. R. Acad. Sci. Paris **180** (1925), 803–806.
- [99] P. S. Urysohn, *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sci. Math. **52** (1927), 43–64 et 74–90.
- [100] V.V. Uspenskij, *A universal topological group with countable base*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 160–161.
- [101] V.V. Uspenskij, *On the group of isometries of the Urysohn universal metric space*, Comment. Math. Univ. Carolinae **31** (1990), 181–182.
- [102] V.V. Uspenskij, *On subgroups of minimal topological groups*, Topology Appl. **155** (2008), 1580–1606.
- [103] W. A. Veech, *Topological dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 775–830.

[104] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970.